

Если ввести сюда число Рейнольдса Re_l , то это условие запишется так [см. формулу (3.106)]:

$$Re_l^{3/4} \gg 1. \quad (3.112)$$

Ниже мы рассмотрим, в какой мере это необходимое условие выполняется в опытах по изучению турбулентности.

При описании области равновесия уже говорилось, что в этой области диссипация не только наблюдается при всех волновых числах, но еще и сильно возрастает с увеличением волнового числа. Поэтому можно ожидать, что при очень большом числе Рейнольдса турбулентности диссипация в интервале волновых чисел, значительно смещенном от области максимальной диссипации в сторону меньших значений, будет пренебрежимо мала по сравнению с потоком энергии, переносимым под действием инерционных сил. В этой подобласти влияние параметра ν должно было бы исчезнуть, а турбулентность можно было бы определять всего лишь одним параметром ϵ . Однако это можно сделать только в том случае, когда отсутствует непосредственное воздействие энергосодержащих вихрей, т. е. любого отличного от ϵ параметра, который мог бы влиять на турбулентность в области энергосодержащих вихрей. Следовательно, условие принадлежности волнового числа к этой подобласти запишется так:

$$k_e \ll k \ll k_d, \quad (3.113)$$

причем турбулентность в этой подобласти статистически независима от области энергосодержащих вихрей и области сильной диссипации.

Колмогоров рассмотрел эту подобласть в своей второй гипотезе:

«Если число Рейнольдса бесконечно велико, то энергетический спектр в подобласти, удовлетворяющей условию (3.113), однозначно определяется единственной величиной ϵ и не зависит от ν ».

Поскольку в этой подобласти перенос энергии за счет инерционных сил является доминирующим фактором, мы будем называть ее инерционной подобластью.

Условие (3.113) существования такой инерционной подобласти по сравнению с условием $k_e \ll k \ll k_d$ существования области равновесия показывает, что число Рейнольдса в данном случае должно быть по своей величине по крайней мере на порядок выше. Условия (3.111) и (3.112), не будучи здесь достаточно точными, должны быть соответственно заменены следующими:

$$Re_\lambda^{3/4} \gg 1 \quad (3.114)$$

и

$$Re_l^{3/8} \gg 1. \quad (3.115)$$

Обратимся теперь к области, лежащей вне области равновесия, а именно к области более низких волновых чисел. Смежной с областью равновесия, но удаленной от нее настолько, чтобы имела статистическая независимость, является область энергосодержащих вихрей. В этой области «частота» $u'k_e$ — величина того же порядка, что и относительная скорость изменения кинетической энергии всего поля турбулентности. Стало быть, имеются основания полагать, что в этой области следует принять в рассмотрение время t как еще один параметр, определяющий, наряду с параметрами ϵ и ν , область равновесия.

Мы не будем пока касаться крайне высоких значений числа Рейнольдса, так что диссипацией и связанным с ней влиянием вязкости в этой области можно пренебречь. Однако поскольку любых двух из трех параметров ϵ , ν и t , как это следует из соображений размерности, уже достаточно, чтобы представить величины E и k в безразмерном виде, то эти три параметра не могут быть независимыми друг от друга. Они образуют безразмерный комплекс, который должен оставаться постоянным:

$$\frac{\epsilon t^2}{\nu} = \text{const.} \quad (3.116)$$

В следующем параграфе будет показано, что этот безразмерный комплекс можно интерпретировать как число Рейнольдса турбулентности. Таким образом, согласно соотношению (3.116) число Рейнольдса в процессе вырождения турбулентности должно оставаться постоянным. Эта область более подробно будет рассмотрена в следующем параграфе, посвященном вырождению турбулентности.

Если снова предположить, что число Рейнольдса бесконечно велико и, следовательно, в области равновесия существует инерционная подобласть, где энергетический спектр определяется только параметром ϵ и не зависит от ν , то логично ожидать, что в области энергосодержащих вихрей, соответствующей более низким волновым числам, влияние вязкости тоже будет пренебрежимо мало; тогда в этой области с меньшими волновыми числами энергетический спектр будет зависеть только от двух параметров ϵ и t .

Наконец, в диапазоне еще более низких волновых чисел имеются наиболее крупные вихри, которые отличаются высокой степенью устойчивости, причем изменение их по времени ослабевает с уменьшением волнового числа. Это можно заключить на основании соотношения (3.86), если в нем для функций $E(k, t)$ и $F(k, t)$ принять их асимптотические формы при $k \rightarrow 0$. Нам уже известно, что в диапазоне самых низких волновых чисел энергетический спектр описывается соотношением

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(k, t) = I(t) k^4.$$

Из формул (3.67) и (3.12) следует, что величина I составляет

$$I = -\frac{1}{6\pi} \int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t) dr = \frac{u'^2}{3\pi} \int_0^\infty r^4 f(r, t) dr. \quad (3.117)$$

Интеграл в правой части является интегралом Лойцянского (3.39). [Тот же результат легко получить путем использования в формуле (3.70) разложения в ряд по $\sin kr$ и $\cos kr$.]

Отсюда следует, что интеграл Лойцянского или I можно рассматривать как параметр, определяющий диапазон самых низких волновых чисел.

Кроме того, существует и другая особенность, которая характерна для крупных вихрей в области более низких волновых чисел, а именно диффузионные свойства турбулентности, обусловленные, как указывалось в главе 1, главным образом наличием крупных вихрей. Поэтому Карман и Линь [12] высказали предположение о том, что коэффициент вихревой диффузии ϵ можно рассматривать как параметр, определяющий характер турбулентности в области низких волновых чисел.

Итак, мы рассмотрели, по-видимому, весь диапазон волновых чисел, который, начиная с области малых волновых чисел, можно представить следующим образом [12]:

1. Область малых волновых чисел, определяемая величинами I и ϵ , в которой турбулентность является существенно постоянной (перманентной).

а) Подобласть наиболее низких волновых чисел, определяемая единственной величиной I .

2. Область средних волновых чисел, определяемая ϵ и ϵ .

а) Подобласть более низких волновых чисел, определяемая только величиной ϵ , в которой турбулентность может все еще обладать некоторой перманентностью.

3. Область более высоких волновых чисел, определяемая величинами ϵ , ν и t .

а) В этой области находятся главным образом энергосодержащие вихри.

б) Определяется только величинами ϵ и t при условии $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$.

4. Область наиболее высоких волновых чисел, определяемая величинами ϵ и ν . Это — универсальная равновесная область.

а) Инерционная подобласть более низких волновых чисел, определяемая единственной величиной ϵ при условии $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$.

Исходя из соображений размерности, довольно просто можно указать форму энергетического спектра в различных областях, а для подобластей, в которых турбулентность определяется только одним параметром, это можно сделать совершенно точно.

Величина $E(k, t)$ и параметры, рассмотренные выше, имеют следующие размерности:

$$[E] = [L^3 T^{-2}],$$

$$[k] = [L^{-1}],$$

$$[\nu] = [L^2 T^{-1}],$$

$$[\epsilon] = [L^2 T^{-1}],$$

$$[\varepsilon] = [L^2 T^{-3}],$$

$$[I] = [L^7 T^{-2}].$$

Результаты, касающиеся формы функции $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел, представлены в таблице и изображены на рис. 3.11.

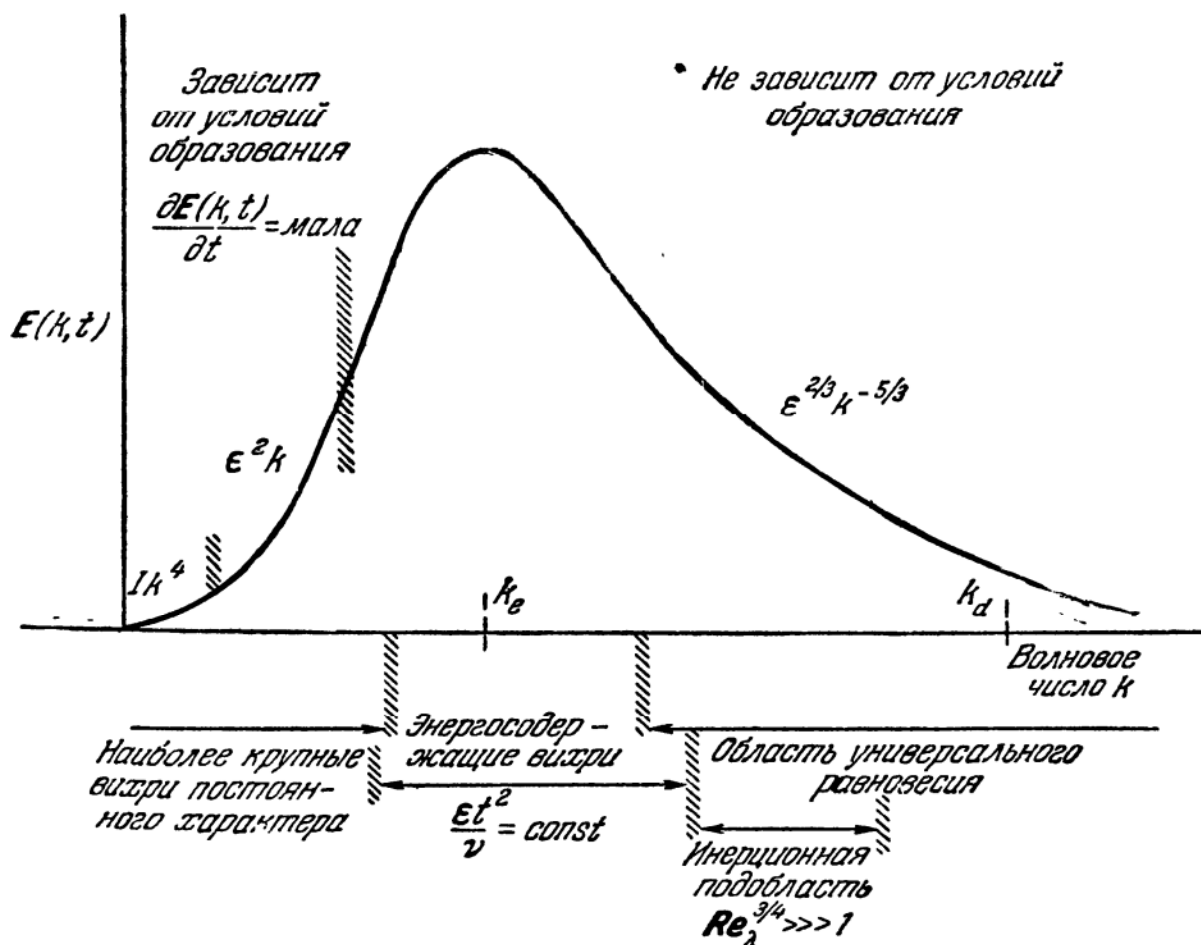


Рис. 3.11. Форма распределения $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел.

Особого внимания заслуживает форма функции $E(k, t)$ в инерционной подобласти:

$$E(k, t) = \text{const } \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (3.118)$$

Таблица

Форма распределения $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел

Области по возрастающим значениям $k \rightarrow$				
	(1)	(2)	(3)	(4)
Величины . . .	E, k, I, ϵ	E, k, ϵ, ϵ	E, k, ϵ, ν, t	E, k, ϵ, ν
Фундаментальные параметры . . .	I, ϵ	ϵ, ϵ	ϵ, ν , или ϵ, t , или ν, t	ϵ, ν
Характерная длина . . .	$(I/\epsilon^2)^{1/3}$	$(\epsilon^3/\epsilon)^{1/4}$	$(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$	$(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$
Характерное время . . .	$(I^2/\epsilon^7)^{1/3}$	$(\epsilon/\epsilon)^{1/2}$	$(\nu/\epsilon)^{1/2}$	$(\nu/\epsilon)^{1/2}$
Характерная скорость . . .	$(\epsilon^5/I)^{1/3}$	$(\epsilon\epsilon)^{1/4}$	$(\nu\epsilon)^{1/4}$	$(\nu\epsilon)^{1/4}$
$E(k, t)$. . .	$\epsilon^{9/3} I^{-1/3} E^* [k(I/\epsilon^2)^{1/3}]$	$\epsilon^{5/4} \epsilon^{1/4} E^* [k(\epsilon^3/\epsilon)^{1/4}]$	$\nu^{5/4} \epsilon^{1/4} E^* [k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}], \epsilon t^2/\nu]$ $\epsilon^{3/2} t^{5/2} E^* (k\epsilon^{1/2} t^{3/2})$, если $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$	$\nu^{5/4} \epsilon^{1/4} E^* [k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}]$
Подобласти				
Фундаментальный параметр.	I	ϵ		$Re_\lambda^{3/4} \gg 1$
$E(k, t)$. . .	$I k^{-4}$	$\text{const } \epsilon^2 k$		$\frac{\epsilon}{\text{const } \epsilon^{2/3} k^{-5/3}}$

Эту формулу для $E(k, t)$, которая находит применение при больших числах Рейнольдса, часто называют спектральным законом Колмогорова, так как он первым обнаружил этот результат (см. его вторую гипотезу). Однако независимо от Колмогорова тот же результат был получен также Онзагером [47] и Вейцзекером [48].

Распределение интенсивности турбулентности в инерционной под-области можно определить по волновым числам или по размерам вихрей. Пусть u'_k — среднеквадратичная величина скорости всех вихрей с волновыми числами большими, чем k ; тогда

$$\frac{3}{2} u_k'^2 = \int_k^\infty E(k, t) dk. \quad (a)$$

Если пренебречь добавкой к кинетической энергии от вихрей, соответствующих области волновых чисел вне инерционной под-области, и для функции $E(k, t)$ принять указанный выше закон Колмогорова, то получим

$$u'_k \sim k^{-1/3} \sim l_k^{1/3}.$$

Отсюда следует, что интенсивность турбулентного движения пропорциональна кубическому корню из размера рассматриваемой области (в этом случае — из размера вихря).

Вейцзекер [48] из простых соображений получил аналогичный результат и затем, принимая во внимание уравнение (a), пришел к заключению, что при больших числах Рейнольдса должен выполняться закон (3.118).

За исключением трех подобластей, указанных в таблице 3.1, теория размерностей не дает возможности найти точное описание энергетического спектра $E(k, t)$. Из-за этого мы вынуждены обратиться к динамическому уравнению для спектральной функции, записанному либо в дифференциальной форме (3.86), либо в интегральной форме (3.92), и попытаться решить эти уравнения. До настоящего времени единственным способом решения этих уравнений было принятие предположения о существовании некоторой связи между функцией переноса $F(k, t)$, энергетическим спектром $E(k, t)$ и волновым числом k .

При этом делались различные предположения. Все они основаны на более или менее интуитивной физической картине механизма переноса энергии по диапазону волновых чисел. Первое из рассматриваемых нами предположений было сделано Обуховым [13], который принял, что перенос энергии по диапазону волновых чисел аналогичен передаче энергии от основного движения к турбулентному благодаря турбулентным напряжениям сдвига или притоку турбулентной энергии [см. главу 1, уравнение (1.98)]. Здесь нам придется обратиться к той части рейнольдсовых напряжений, которая связана

с волновыми числами большими, чем k , а также к тем средним скоростям сдвига, которые связаны с волновыми числами, меньшими k . Обухов предположил, что для волновых чисел меньших, чем k , рейнольдсовы напряжения пропорциональны кинетической энергии $\int_k^\infty E(k, t) dk$ и средней скорости деформации. Среднеквадратичное значение скорости деформации при турбулентном движении [см. уравнение (3.20)] запишется так:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = - \left[\frac{\partial^2 Q_{i,i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right]_{r=0}.$$

Используя соотношение (3.54), получаем

$$- \frac{\partial^2 Q_{i,i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int k^2 E_{i,i} \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3 = 4\pi \int_0^\infty k^4 \frac{\sin kr}{kr} E_{i,i} dk.$$

Отсюда

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 4\pi \int_0^\infty k^4 E_{i,i} dk = 2 \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk,$$

и, стало быть, среднеквадратичное значение скорости деформации при турбулентном движении в диапазоне волновых чисел меньших, чем k , составляет

$$\left[2 \int_0^k k^2 E(k, t) dk \right]^{1/2}.$$

Таким образом, предположение Обухова запишется в следующем виде:

$$\int_0^k F(k, t) dk = -\alpha \left[2 \int_0^k k^2 E(k, t) dk \right]^{1/2} \int_k^\infty E(k, t) dk, \quad (3.119)$$

где α — универсальная постоянная.

Коважный [14] принял допущение о том, что интеграл $\int_0^k F(k, t) dk$ является функцией только $E(k, t)$ и k :

$$\int_0^k F(k, t) dk = -\alpha [E(k)]^{3/2} k^{5/2}. \quad (3.120)$$

Наиболее приемлемое предположение было, по всей вероятности, высказано Гейзенбергом [15]. Оно состоит в том, что влияние вихрей

с волновыми числами большими, чем k , посредством которых осуществляется отвод энергии от вихрей с волновыми числами меньшими, чем k , таково, как будто бы имеется некоторая турбулентная вязкость. Тогда формально можно записать

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\epsilon(k, t) \int_0^k k^2 E(k, t) dk,$$

где величина $\epsilon(k, t)$ обозначает кинематический коэффициент турбулентной вязкости, обусловленной вихрями с волновыми числами, лежащими в диапазоне от k до бесконечности.

Далее можем положить, что $\epsilon(k, t) \sim u'_k/k$, где

$$u'_k = \left[\frac{2}{3} \int_k^\infty E(k, t) dk \right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\epsilon(k, t) \sim \frac{1}{k} \left[\int_k^\infty E(k, t) dk \right]^{1/2}.$$

Поскольку речь идет о размерностях рассматриваемых величин, это соотношение можно заменить эквивалентным выражением

$$\epsilon(k, t) \sim \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk,$$

которое соответствует форме, предложенной Гейзенбергом. Следовательно,

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E(k, t) dk. \quad (3.121)$$

Физическая модель, на которой основано предположение Гейзенберга, представляется вполне приемлемой. Однако, как показал Бэтчелор [11], в этой связи можно высказать одно принципиальное возражение. С физической точки зрения введение турбулентной вязкости, характеризующей перенос энергии от более крупных вихрей к более мелким, справедливо лишь в том случае, когда мелкие вихри, благодаря которым и существует эта турбулентная вязкость, являются статистически независимыми от крупных вихрей. Но форма выражения Гейзенберга (3.121) такова, что значения обоих интегралов в правой части определяются, в основном, вихрями с волновыми числами k , близкими к нижнему пределу первого интеграла и к верхнему

пределу второго интеграла. На самом деле перенос энергии под действием инерционных сил, характеризуемый функцией переноса $F(k, t)$, обусловлен главным образом взаимодействием между вихрями с мало отличающимися волновыми числами.

Более общее выражение для интеграла $\int_0^k F(k, t) dk$ было дано

Карманом [9]. Функцию $F(k, t)$ можно интерпретировать как разность между энергией, подведенной к вихрям с волновыми числами меньшими, чем k , и энергией, переданной более мелким вихрям с волновыми числами большими, чем k . Далее, Карман полагает, что

$$F(k, t) = 2\alpha \left\{ E^\varphi k^\psi \int_0^k E^{\varphi'} k^{\psi'} dk - E^{\varphi'} k^{\psi'} \int_k^\infty E^\varphi k^\psi dk \right\}.$$

Из соображений размерности следует, что

$$\varphi + \varphi' = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \psi + \psi' = \frac{1}{2},$$

$$F(k, t) = 2\alpha \left[E^\varphi k^\psi \int_0^k E^{\frac{3}{2}-\varphi} k^{\frac{1}{2}-\psi} dk - E^{\frac{3}{2}-\varphi} k^{\frac{1}{2}-\psi} \int_k^\infty E^\varphi k^\psi dk \right],$$

откуда

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\alpha \left[\int_0^k E(k, t)^{\frac{3}{2}-\varphi} k^{\frac{1}{2}-\psi} dk \right] \left[\int_k^\infty E(k, t)^\varphi k^\psi dk \right]. \quad (3.122)$$

При $\varphi = 1$, $\psi = 0$ получаем видоизмененную формулу Обухова:

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\alpha \left\{ \int_0^k [E(k, t) k]^{1/2} dk \right\} \left[\int_k^\infty E(k, t) dk \right].$$

При $\varphi = 3/2$, $\psi = 0$ получаем видоизмененную формулу Коважного:

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\alpha \left\{ \int_k^\infty [E(k, t)]^{3/2} dk \right\} \frac{2}{3} k^{3/2}.$$

При $\varphi = 1/2$, $\psi = -3/2$ получаем формулу Гейзенберга:

$$\int_0^k F(k, t) dk = -2\alpha \left\{ \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \right\} \left[\int_0^k k^2 E(k, t) dk \right].$$

При различных предположениях относительно вида функции $F(k, t)$ были получены решения динамического уравнения (3.92) для

равновесной области. В этой области, где $k \gg k_e$, член $\partial E(k, t)/\partial t$ очень мал и, стало быть, величиной $\frac{\partial}{\partial t} \int_k^\infty E(k, t) dk$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E(k, t) dk$. Отсюда в уравнении (3.92) можем положить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k, t) dk \approx \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E(k, t) dk = -\varepsilon = -2\nu \int_0^k k^2 E(k, t) dk.$$

В этом случае уравнение (3.92) запишется либо в форме

$$-\varepsilon = \int_0^k F(k, t) dk - 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t) dk, \quad (3.123)$$

либо как

$$\int_0^k F(k, t) dk + 2\nu \int_k^\infty k^2 E(k, t) dk = 0. \quad (3.124)$$

С помощью формулы (3.119) Обухову удалось получить решение уравнения (3.124), правда, не в замкнутом виде. Для инерционной подобласти решение для $E(k, t)$, как это и должно быть, определяется выражением $\text{const } k^{-5/3}$. Но для более высоких значений k это решение затухает значительно медленнее, нежели продолжение кривой $k^{-5/3}$, пока, наконец, при определенном предельном значении k , когда $E(k, t)$ все еще является конечной величиной, полная диссипация не становится уже равной ε , хотя это должно быть при $E(k, t) = 0$. Отсюда, как указал Бэтчелор [11], следует, что предположение Обухова (3.119) страдает определенным изъяном.

Используя свою формулу для $\int_0^k F(k, t) dk$, Коважный получил решение

$$E(k, t) = \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha^{10}} \right)^{1/3} k^{-5/3} \left[1 - \frac{\alpha^{2/3}}{2} \left(\frac{k}{k_d} \right)^{4/3} \right]^2,$$

где $k_d(t) = [\varepsilon(t)/\nu^3]^{1/4}$. Это решение также справедливо при $k \ll k_d$; оно тоже имеет предельное значение k , но при этом значении $E(k, t) = 0$.

Посмотрим теперь, к какому результату приводит предположение Гейзенберга (3.121). Подстановка (3.121) в (3.123) дает

$$\varepsilon = 2\alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E(k, t) dk + 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t) dk. \quad (3.125)$$

При не слишком больших значениях k , которые не выходят за пределы инерционной подобласти, вязким членом можно пренебречь. Тогда решением этого уравнения будет

$$E(k, t) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha}\right)^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.126)$$

что находится в соответствии с решением (3.118). Для очень больших значений k , при которых вязкость играет существенную роль, Гейзенберг получил

$$E(k, t) = \text{const } k^{-7}. \quad (3.127)$$

Для промежуточного диапазона Гейзенберг дает интерполяционную формулу, которая в инерционной и в вязкой подобластях переходит соответственно в указанные выше решения. Мы не приводим здесь эту интерполяционную формулу, так как Бэссом [6] и независимо от него Чандрасекаром [16] было показано, что можно получить и точное решение уравнения (3.125).

Чтобы показать это, положим

$$\theta(k) = \int_0^k k^2 E(k) dk,$$

так что

$$E = \frac{1}{k^2} \frac{d\theta}{dk}.$$

Тогда уравнение (3.125) примет вид

$$\nu + \alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{1}{k^5} \frac{d\theta}{dk}} dk = \frac{\varepsilon}{2\theta}.$$

Дифференцирование по k дает

$$-\alpha \sqrt{\frac{1}{k^5} \frac{d\theta}{dk}} = -\frac{\varepsilon}{2\theta^2} \frac{d\theta}{dk},$$

или

$$\frac{1}{k^5} \frac{d\theta}{dk} = \left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} \left(\frac{d\theta}{dk}\right)^2.$$

Решение этого уравнения выражается формулой

$$\theta^3 = \frac{1}{\text{const} + \frac{3}{4} \left(\frac{2\alpha}{\varepsilon} \right)^2 k^{-4}}.$$

Так как при $k \rightarrow \infty$ имеем $\theta = \varepsilon/2\nu$, то постоянная в этом выражении должна быть равна $8\nu^3/\varepsilon^3$. Если ввести величину $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, то будем иметь

$$\theta^3 = \frac{\varepsilon^3}{3\alpha^2\nu^3} \frac{\frac{k^4}{k_d^4}}{1 + \frac{8}{3\alpha^2} \left(\frac{k}{k_d} \right)^4}.$$

Отсюда

$$E(k, t) = \left(\frac{8}{9\alpha} \right)^{2/3} (\varepsilon\nu^5)^{1/4} \frac{\left(\frac{k}{k_d} \right)^{-5/3}}{\left[1 + \frac{8}{3\alpha^2} \left(\frac{k}{k_d} \right)^4 \right]^{4/3}}. \quad (3.128)$$

Нетрудно убедиться, что при $k/k_d \ll 1$ выражение (3.128) приводится к (3.126), а при $k/k_d \gg 1$ получается формула (3.127). В этом случае постоянная в формуле (3.127) оказывается равной $\frac{1}{4} \alpha^2 \varepsilon^2 \nu^{-4}$. Переход к области с сильным влиянием вязкости, в соответствии с приведенной выше интерпретацией величины $k_d = \frac{1}{\eta}$, сосредоточен, по-видимому, вблизи $k \approx k_d$.

Если проанализировать различные предположения, сделанные относительно функции переноса $\int_0^k F(k, t) dk$, то можно заметить, что все они представляют собой произведение двух членов, один из которых является интегралом по интервалу волновых чисел от 0 до k , а другой — интегралом по интервалу волновых чисел от k до ∞ . Стюарт и Таунсенд [17] показали, что подобные предположения при очень больших волновых числах обязательно должны приводить к степенному спектральному закону, безотносительно к точной форме этих сомножителей.

Несколько выше, в этом параграфе, было высказано возражение против гипотезы Гейзенберга о турбулентной вязкости, обусловленной мелкими вихрями, а именно, что она находится в противоречии с требованием статистической независимости между этими и крупными вихрями. Это возражение становится очень существенным, если рассматривать вязкую область $k > 0,5k_d$, ниже которой наблюдается наибольшая вязкая диссипация. В этой области гипотеза Гейзенберга теряет силу, а формула энергетического спектра $E(k) \sim k^{-7}$ оказы-

вается здесь неприемлемой. Это было четко показано Таунсендом [52]. Наиболее мелкие вихри образуются в процессе искривления и растяжения крупных вихрей при волновых числах, вероятно, порядка k_d . Далее, каждый жидкий элемент в турбулентном потоке деформируется в длинную тонкую ленту; этот процесс более подробно будет рассмотрен в § 5.4. При этом наиболее мелкие вихри образуют, вероятно, концентрированную вихревую пелену. Попытка обоснования этой идеи также была сделана Бюргерсом [57]. В этом случае довольно очевидно, что наиболее мелкие вихри не являются статистически независимыми от вихрей с волновыми числами порядка k_d . Но имеется еще и другое возражение. Экспериментальные данные показали, что завихренность этих наиболее мелких вихрей пренебрежимо мала по сравнению с завихренностью вихрей, от которых они получают свою энергию, в то время как гипотеза Гейзенберга подразумевает совершенно противоположное. На самом деле в основной области $k < 0,5k_d$ вихри, подводящие энергию, имеют, в общем случае, большую энергию, но меньшую завихренность, нежели вихри, получающие энергию.

Если верно, что вихри при волновых числах $k \gg k_d$ образуют концентрированную, но слабую вихревую пелену, накладывающуюся в виде возмущений на основное поле завихренности более крупных вихрей и находящуюся в энергетическом равновесии (по причине баланса между эффектами растяжения и вязкости), то подобную модель можно использовать для вывода более правильного выражения для энергетического спектра, нежели это возможно исходя из гипотезы Гейзенберга. Таунсенду удалось получить выражение для одномерного спектра компоненты u_1 турбулентных пульсаций скорости из относительно простой модели, в которой вихри образуют вихревую пелену. Это выражение записывается следующим образом:

$$E_1(k_1) = A \left(\frac{k_1}{k_d} \right)^{-2} \int_0^1 (1 - s^2) \exp \left[-\frac{2}{s^2} \left(\frac{k_1}{k_d} \right)^2 \right] ds. \quad (3.129)$$

Сравнение расчетов с экспериментальными значениями величины $(k_1/k_d)^6 E_1(k_1)$, которая рельефно выделяет характерные особенности спектральной функции в области больших волновых чисел, указывает на весьма удовлетворительное согласие.

Мы пока еще не получили такого решения для $E(k, t)$, которое было бы справедливо в диапазоне волновых чисел энергосодержащих вихрей и для еще меньших волновых чисел, за исключением области самых низких значений волновых чисел, где величина $E(k, t)$ пропорциональна k^4 . Чтобы получить это решение, надо обратиться к полному уравнению (3.86) или (3.92), поскольку скорость вырождения турбулентности имеет тот же порядок, что и «частота» $u'_k k_e$ вихрей в указанных выше диапазонах.

Ввиду того, что процесс вырождения будет рассматриваться в отдельном параграфе, с решениями для $E(k, t)$ в диапазоне волновых чисел энергосодержащих вихрей мы будем иметь дело там, а не здесь. Однако здесь следует упомянуть о формуле Кармана [9], предложенной им в качестве интерполяционного соотношения для диапазона, заключенного между областью «перманентных», самых крупных вихрей (закон « k^4 ») и инерционной подобластью (закон « $-5/3$ »):

$$E(k, t) = E(k_e, t) 2^{17/6} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right]^{17/6}}. \quad (3.130)$$

Здесь величина k_e зависит от времени.

Функцию $E(k_e, t)$ можно связать с интегралом Лойцянского I , так как при $k/k_e \rightarrow 0$ должно выполняться условие

$$Ik^4 = E(k_e, t) 2^{17/6} \left(\frac{k}{k_e}\right)^4$$

или

$$E(k_e, t) = 2^{-17/6} I k_e^4. \quad (3.130a)$$

Формула (3.130) для очень больших значений k/k_e сводится к закону « $k^{-5/3}$ ». Преимущество этой формулы состоит в том, что она весьма удобна для дальнейшего использования в различных вычислениях, так как обычно приводит к легко интегрируемым функциям.

Формула Кармана (3.130) применима только для столь больших чисел Рейнольдса, при которых существует инерционная подобласть (закон « $k^{-5/3}$ »), а влияние вязкости пренебрежимо мало. Но в § 1.11 уже упоминалось о том, что при больших числах Рейнольдса коэффициенты корреляции вполне удовлетворительно могут быть аппроксимированы экспоненциальным законом. В § 3.4 было показано, что если этот экспоненциальный закон применить к функции продольной корреляции $f(r, t)$, то соответствующая ей функция пространственного энергетического спектра будет иметь вид

$$E(k, t) = \frac{8}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{\Lambda_f^4 k^4}{(1 + \Lambda_f^2 k^2)^3}. \quad (3.131)$$

Для больших значений k это выражение упрощается:

$$E(k, t) \approx \frac{8}{\pi} \frac{u'^2}{\Lambda_f} k^{-2},$$

что не слишком сильно отличается от закона « $k^{-3/3}$ ».

Представляет интерес определить одномерный энергетический спектр и корреляционные функции, соответствующие решениям и формулам, данным выше для $E(k, t)$. Рассмотрим сначала решение

Гейзенберга (3.128). С помощью соотношения (3.72) можно было бы вычислить одномерный энергетический спектр $E_1(k_1, t)$, а затем, используя формулу (3.49), найти коэффициент продольной корреляции $f(x_1, t)$. Однако интегрирование появляющихся при этом выражений приводит к очень сложным формулам; кроме того, решение, полученное для $f(x_1, t)$, было бы справедливо лишь в ограниченном диапазоне $x_1 \ll l_e$, потому что решение Гейзенберга (3.128) выполняется только в диапазоне волновых чисел $k \gg k_e$. По этим причинам мы не будем приводить здесь эти решения.

Напротив, одномерный спектр и коэффициент корреляции для инерционной подобласти можно получить без всяких затруднений. Нам уже известно, что в этой подобласти выполняется простой степенной закон:

$$E(k_1, t) = \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\epsilon \nu^5)^{1/4} \left(\frac{k}{k_d}\right)^{-5/3}, \quad \text{когда } \frac{k}{k_d} \ll 1. \quad (3.132)$$

Подстановка в формулу (3.72) показывает, что функция $E_1(k_1, t)$ подчиняется тому же степенному закону:

$$E_1(k_1, t) = \frac{18}{55} \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\epsilon \nu^5)^{1/4} \left(\frac{k_1}{k_d}\right)^{-5/3}, \quad \text{когда } \frac{k}{k_d} \ll 1. \quad (3.132a)$$

В вязкой подобласти, где $k/k_d \gg 1$, степенной закон Гейзенберга $E(k) \sim k^{-7}$ тоже привел бы к аналогичному результату для одномерного спектра $E_1(k_1)$. Но опять-таки, вследствие несправедливости гипотезы Гейзенберга в этой подобласти, представляется более целесообразным рассмотреть спектральную функцию типа (3.129), предложенную Таунсендом.

Если требуется вычислить коэффициент продольной корреляции $f(x_1, t)$, то следует вспомнить, что спектр Колмогорова справедлив в диапазоне $k_e \ll k \ll k_d$ и, следовательно, соответствующее решение для $f(x_1, t)$ справедливо лишь в диапазоне $\eta \ll x_1 \ll l_e$.

Таким образом, из соотношения (3.49) имеем

$$u'^2 f(x, t) = C \int_{k_e}^{k_d} k_1^{-5/3} \cos k_1 x_1 dk_1 + \int_0^{k_e} E_1(k_1, t) \cos k_1 x_1 dk_1 + \\ + \int_{k_d}^{\infty} E_1(k_1, t) \cos k_1 x_1 dk_1,$$

где

$$C = \frac{18}{55} \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\epsilon \nu^5)^{1/4} k_d^{5/3} = \frac{18}{55} \left(\frac{8\epsilon}{9\alpha}\right)^{2/3}.$$

Теперь следовало бы вычислить известные определенные интегралы для случая, когда пределами первого интеграла являются 0 и ∞ .

Однако при нулевом нижнем пределе этот интеграл не сходится. Поэтому вместо величины $u'^2 f(x_1, t)$ лучше рассматривать

$$u'^2 [1 - f(x_1, t)] = C \int_{k_e}^{k_d} k_1^{-5/3} (1 - \cos k_1 x_1) dk_1 + \\ + \int_0^{k_e} E_1(k_1, t) (1 - \cos k_1 x_1) dk_1 + \int_{k_d}^{\infty} E_1(k_1, t) (1 - \cos k_1 x_1) dk_1.$$

При малых значениях k_1 подынтегральное выражение обращается в нуль, так как разность $1 - \cos k_1 x_1$ убывает быстрее, чем возрастает величина $k_1^{-5/3}$, но при больших значениях k_1 подынтегральное выражение также обращается в нуль вместе с функцией $k_1^{-5/3}$. Отсюда следует, что пределы k_e и k_d можно с уверенностью заменить на 0 и ∞ ; тогда получим

$$u'^2 [1 - f(x_1, t)] = C \int_0^{\infty} k_1^{-5/3} (1 - \cos k_1 x_1) dk_1 = \\ = C x_1^{2/3} \int_0^{\infty} y^{-5/3} (1 - \cos y) dy.$$

Этот интеграл посредством интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\frac{3}{2} \int_0^{\infty} y^{-2/3} \sin y dy = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

так что

$$f(x_1, t) = 1 - \frac{3}{4} \frac{C}{u'^2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) x_1^{2/3},$$

или

$$f(x_1, t) = 1 - \frac{A}{u'^2} (\epsilon x_1)^{2/3}, \quad (3.133)$$

где $A = \frac{18}{55} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{2/3}$ — универсальная постоянная.

Для энергетического спектра $E(k, t)$ в диапазоне волновых чисел от $k=0$ вплоть до области энергосодержащих вихрей имеются интерполяционная формула Кармана (3.130) и эмпирическая формула (3.131). Что касается последней, то соответствующий одномерный энергетический спектр и коэффициенты корреляции были уже определены нами выше.

Используя интерполяционную формулу Кармана, из соотношения (3.72) получаем

$$E_1(k_1, t) = E(k_e, t) 2^{17/6} \frac{18}{55} \left[1 + \left(\frac{k_1}{k_e} \right)^2 \right]^{-5/6}.$$

Подстановка в (3.49) после интегрирования дает

$$u'^2 f(x_1, t) = 2^{7/2} \frac{9}{55} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} k_e E(k_e, t) (x_1 k_e)^{1/3} K_{1/3}(x_1 k_e),$$

где $K_{1/3}(y)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя порядка $1/3$.

В этих выражениях величина $E(k_e, t)$ остается пока еще неизвестной. Однако эта величина может быть определена из условия, что соответствующие корреляционные функции при $x_1 = 0$ должны обращаться в единицу. Таким образом, из последнего выражения для $f(x_1, t)$ при $x_1 = 0$ имеем

$$E(k_e, t) = \frac{u'^2}{k_e} \frac{55}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2^{17/6} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0,2 \frac{u'^2}{k_e}.$$

Тогда для $E(k, t)$, $E_1(k_1, t)$ и $f(x_1, t)$ получим следующие соотношения:

$$E(k, t) = \frac{55}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{u'^2}{k_e} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right]^{17/6}}, \quad (3.134)$$

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{u'^2}{k_e} \left[1 + \left(\frac{k_1}{k_e}\right)^2\right]^{-5/6} \quad (3.135)$$

и

$$f(x_1, t) = \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_e x_1)^{1/3} K_{1/3}(k_e x_1). \quad (3.136)$$

Для коэффициента поперечной корреляции имеем

$$g(x_1, t) = \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_e x_1)^{1/3} \left[K_{1/3}(k_e x_1) - \frac{k_e x_1}{2} K_{-2/3}(k_e x_1) \right]. \quad (3.137)$$

При малых значениях $k_e x_1$ соотношение (3.136) упрощается:

$$f(x_1, t) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{k_e x_1}{2}\right)^{2/3},$$

а формула (3.137) принимает вид

$$g(x_1, t) \approx 1 - \frac{4}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{k_e x_1}{2}\right)^{2/3}.$$

Из сравнения соотношения для $f(x_1, t)$ с выражением (3.133) следует, что

$$k_e = \frac{1}{l_e} = \text{численный коэффициент} \times \frac{\varepsilon}{u'^3}.$$

Вычисление этого численного коэффициента можно произвести путем сравнения выражения (3.134) для больших значений k/k_e с формулой (3.126). Из соотношения (3.134) для больших k/k_e получаем

$$E(k, t) = \frac{55}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{V\pi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{u'^2}{k_e} \left(\frac{k}{k_e}\right)^{-2/3},$$

так что, согласно (3.126),

$$k_e = \frac{8}{9\alpha} \left[\frac{9}{55} \frac{V\pi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \right]^{3/2} \frac{\varepsilon}{u'^3} = \frac{0,51}{\alpha} \frac{\varepsilon}{u'^3}.$$

Выше упоминалось о том, что l_e — величина такого же порядка, как и интегральный масштаб Λ_f . Тогда этот масштаб [см. (3.74)] легко можно получить из выражения для $E_1(k_1, t)$, откуда, согласно формуле (3.134), имеем

$$\Lambda_f(t) = \frac{\pi}{2u'^2} E_1(0, t) = V\pi \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1}{k_e} \approx \frac{0,75}{k_e} = 0,75l_e. \quad (3.138)$$

Мы рассмотрели различные предположения, на основании которых удается полностью или частично решить уравнение для динамической функции энергетического спектра. В нескольких случаях к тому же было показано, как можно вычислить соответствующие корреляционные функции. Но полученные таким образом величины полностью зависят от справедливости принятых предположений. Отсюда вытекает необходимость экспериментальной проверки сделанных предположений. Однако непосредственную проверку предположений о связи между функциями спектрального переноса $F(k, t)$ и энергетического спектра $E(k, t)$ осуществить очень трудно. Применяемый до сих пор метод является косвенным и состоит в сравнении либо вычисленного энергетического спектра, либо вычисленных

корреляционных функций с соответствующими экспериментально определенными величинами. В главе 1 уже говорилось, что корреляционные функции поддаются более точному экспериментальному определению в диапазоне высоких значений волновых чисел. Это следует помнить при интерпретации результатов измерений. Но, помимо вопроса о точности измерений, важное значение имеет еще и тот факт, что корреляционные функции, определенные путем интегрирования из соответствующих энергетических спектров, весьма слабо зависят от положенных в основу расчета предположений, особенно из-за наличия традиционной эмпирической постоянной — например, универсальной постоянной α , — используемой при различ-

ных предположениях относительно $\int_0^k F(k, t) dk$. Следовательно, удо-

влетворительное согласие между расчетными и измеренными значениями корреляционных функций еще не является адекватным доказательством справедливости того или иного предположения, положенного в основу расчета.

Праудмен [18] сделал попытку проверить предположение Гейзенберга путем подобного сравнения вычисленных и экспериментально определенных функций. Он обнаружил, что численный коэффициент α , вообще говоря, не является универсальной постоянной, а, по-видимому, зависит от числа Рейнольдса, хотя эта зависимость при достаточно больших числах Рейнольдса ($Re_\lambda > 30$) и носит весьма слабый характер, по крайней мере в диапазоне малых волновых чисел. Поскольку общая форма корреляционной кривой определяется именно этим диапазоном малых волновых чисел, Праудмен и пришел к выводу о том, что она находится в весьма хорошем соответствии с экспериментальными результатами при $\alpha = 0,45$. С другой стороны, сам Гейзенберг предложил величину 0,8. Однако если рассматривать только диапазон больших волновых чисел, то α оказывается функцией как Re_λ , так и волнового числа k . Праудмен упоминает о неопубликованных результатах Ли, согласно которым для больших волновых чисел $\alpha = 0,13$. В конечной стадии вырождения, когда влияние вязкости оказывается преобладающим, величина α , как известно, может достигать значения 0,0005. Очевидно, что этот случай является слишком дальней экстраполяцией теории Гейзенберга, в которой числа Рейнольдса в области равновесия, включая инерционную подобласть, предполагаются достаточно большими, и поэтому вряд ли эта экстраполяция может быть справедлива. Однако, как показал недавно Райд [49] в дискуссии по статье Праудмена, отношение S/α коэффициента асимметрии S производной du_1/dx к величине α при увеличении числа Рейнольдса Re_λ от нуля до бесконечности изменяется в довольно узком интервале, от 0,78 до 1,52. Из сопоставления этого результата с экспериментально

определенными значениями S при различных числах Рейнольдса был сделан вывод о том, что величина α должна изменяться в пределах от 0,62 до 0,20. Таким образом, предложенное Праудменом значение $\alpha = 0,45$ является вполне удовлетворительным средним значением между этими двумя крайними величинами. Объяснением, почему Праудмен получил непомерно низкие значения α для области больших

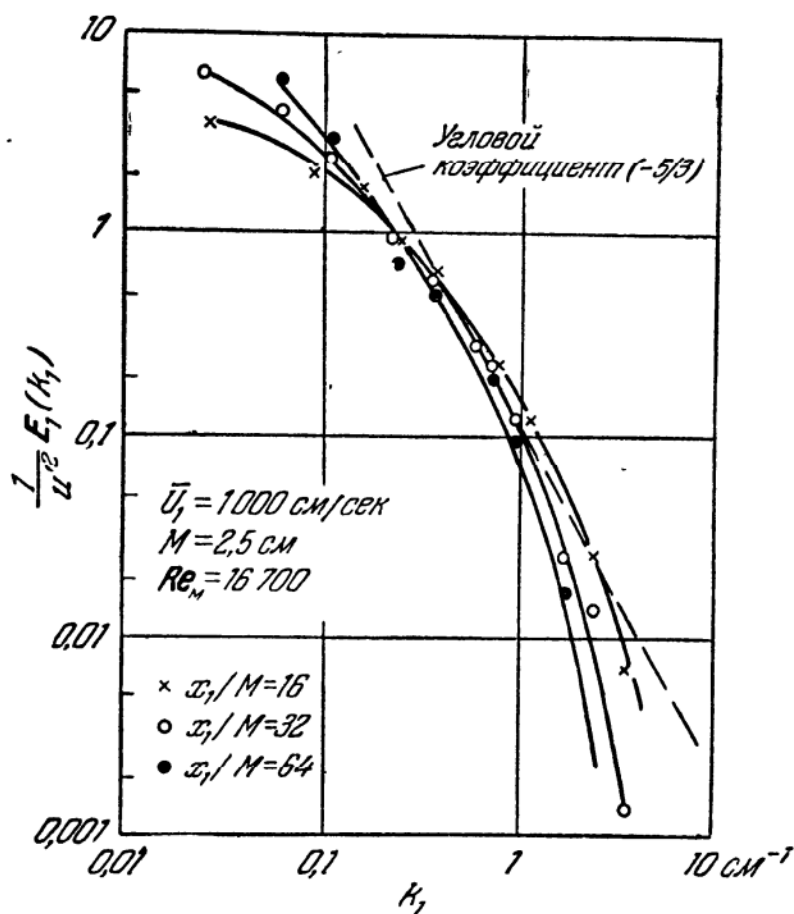


Рис. 3.12. Сравнение одномерного спектра $E_1(k_1)$ со спектральным законом « $-5/3$ » Колмогорова [19].

волновых чисел, в которой влияние вязкости является преобладающим, может служить несостоятельность гипотезы Гейзенберга, о чем речь шла выше.

Сато [19] произвел измерения одномерного спектра $E_1(k_1, t)$ на расстояниях 40, 80 и 160 см вниз по течению от решетки с квадратными ячейками (размер ячейки $M = 2,5 \text{ см}$, диаметр стержней $d = 0,5 \text{ см}$) при скорости потока $\bar{U}_1 = 10 \text{ м/сек}$; в этих опытах $Re_M = \bar{U}_1 M / \nu \approx 17\,000$, а число Рейнольдса $Re_\lambda = u'_\lambda g / \nu$ оставалось почти постоянным в процессе вырождения, и его приближенное значение в трех указанных положениях было равно 60. Результаты, полученные Сато, представлены на рис. 3.12. Они показывают, что

спектр Колмогорова $E_1(k_1) \sim k_1^{-5/3}$ справедлив, вообще говоря, лишь в весьма ограниченном диапазоне волновых чисел.

Такой же вывод получается и из аналогичных измерений, выполненных Липманом [20] при числе Рейнольдса Re_M , отнесенном к размеру ячейки решетки, порядка 10^4 . В этом случае аппроксимация экспериментально определенного одномерного спектра спектральным законом Колмогорова тоже оказывается возможной лишь в очень узком диапазоне волновых чисел. Липман, кроме того, показал, что, в отличие от неудовлетворительной аппроксимации с помощью спектрального закона Колмогорова, более высокая степень приближения

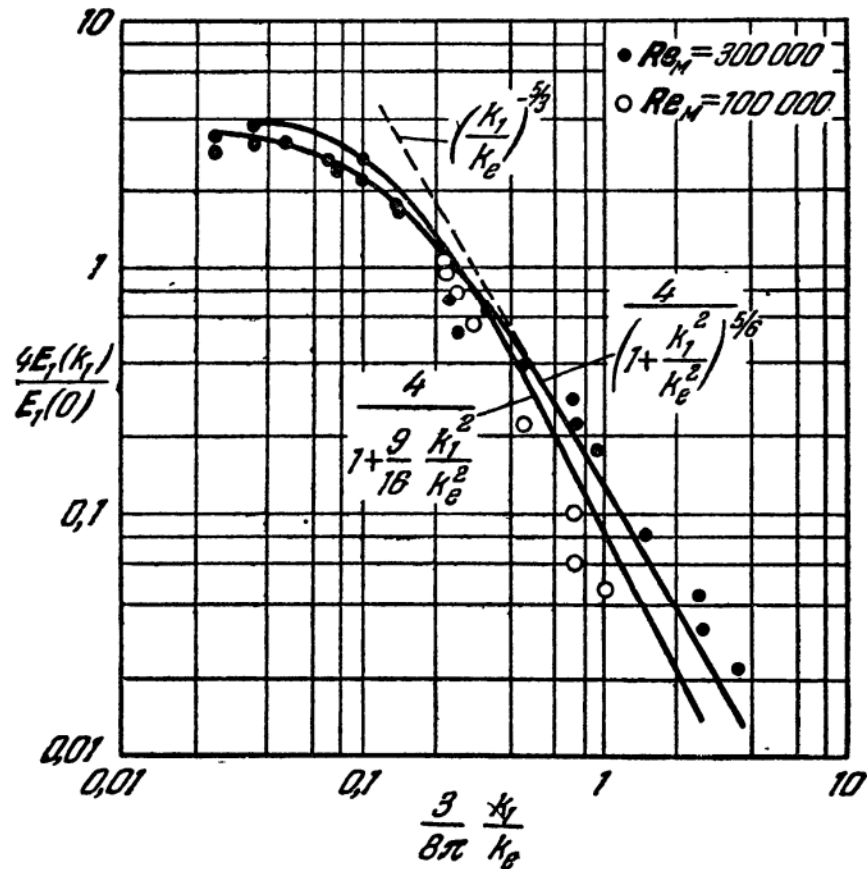


Рис. 3.13. Сравнение измеренного и вычисленного спектра $E_1(k_1)$ [23].

получается почти во всем диапазоне обследованных на опыте волновых чисел при использовании эмпирического соотношения [см. уравнение (1.95) или § 3.4]

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi} u'^2 \frac{\Delta_f}{1 + \Delta_f^2 k_1^2} = \frac{E_1(0, t)}{1 + \Delta_f^2 k_1^2}. \quad (3.139)$$

Однако при больших числах Рейнольдса, например $Re_M = 3 \cdot 10^5$, в области более высоких значений волновых чисел экспериментального диапазона получается намного лучшее согласие со спектром Колмогорова. Это показано на рис. 3.13, где представлена также кривая,

соответствующая интерполяционной формуле Кармана (3.135). На том же рисунке приведены данные и для случая $Re_M = 10^5$. Для этого, несколько меньшего числа Рейнольдса согласие оказывается менее удовлетворительным; в то же время эмпирическое соотношение (3.139) в этой области несколько лучше согласуется с опытом. Экспериментальные данные о соответствующей корреляционной функции были использованы Карманом [9] для сравнения с теоретическим коэффициентом поперечной корреляции, определяемым формулой (3.137). При этом было получено удовлетворительное соответствие, за исключением, быть может, очень больших значений $k_e x_1$ (см. рис. 3.14). Но, между прочим, то же самое можно сказать и

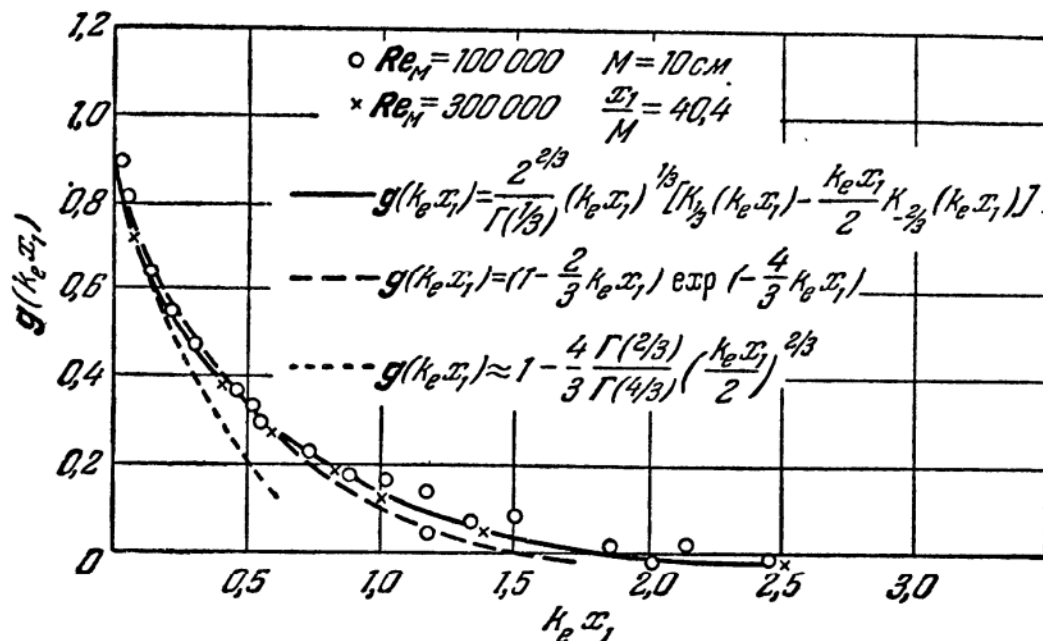


Рис. 3.14. Сравнение измеренной и вычисленной поперечной корреляции скорости $g(k_e x_1)$ [23].

о расчетной корреляционной кривой, соответствующей энергетическому спектру (3.139).

Неудовлетворительное согласие между измерениями энергетического спектра и теоретическим спектром Колмогорова при $Re_M < 10^5$ может вызвать следующий вопрос: какова минимальная величина Re_M или, скорее, Re_λ , необходимая для существования достаточно протяженной инерционной подобласти? Выше уже упоминалось о том, что условие существования равновесной области определяется неравенством $Re_\lambda^{3/2} \gg 1$ [см. (3.111)], а условие существования инерционной подобласти записывается в виде $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$ [см. (3.114)]. Но то, чего мы сейчас добиваемся, — это более точное количественное определение порядка величин. Это можно сделать путем беглой оценки величин Re_λ , наблюдавшихся в лабораторных опытах. В общем случае они ненамного превышают 100.

Стюарт и Таунсенд [17] обнаружили, что в подобных опытах спектр Колмогорова может существовать, самое большее, в диапазоне $k/k_d > 0,6$; этот факт находится в сильном противоречии с требованием, чтобы величина k/k_d была значительно меньше единицы. Стюарт и Таунсенд показали далее, что если для инерционной подобласти по меньшей мере должно быть $k/k_d < 0,1$, то по меньшей мере $Re_\lambda > 1500$, а Re_M должно иметь порядок 10^6 .

Вывод отсюда состоит в том, что с помощью лабораторных опытов едва ли окажется возможным всесторонне проверить справедливость теорий, основанных на предположении о полном равновесии, так как числа Рейнольдса в подобных экспериментах не могут быть сделаны достаточно большими.

§ 3.6. Вырождение изотропной турбулентности

В предыдущих параграфах при рассмотрении динамических уравнений для корреляций скорости и для энергетического спектра было показано, что эти корреляции и спектры изменяются по времени и что турбулентность вырождается, если для поддержания ее не имеется источника энергии. Как и для любых течений жидкости, одним из важнейших параметров в этом случае является число Рейнольдса. Опять-таки в предыдущих параграфах было показано, что характер турбулентности может существенно изменяться в зависимости от того, велико или мало число Рейнольдса турбулентности.

Известно, что практически изотропную турбулентность обычно создают при помощи решетки, помещенной в равномерном потоке. При достаточно высокой скорости потока и удачном выборе решетки оказывается возможным создать такую турбулентность, которая на определенном небольшом расстоянии вниз по течению от решетки становится почти изотропной и имеет большое число Рейнольдса; но, как уже упоминалось, в лабораторных опытах пока еще не удалось получить такие большие значения этого числа Рейнольдса, которые были бы желательны для проверки некоторых характерных особенностей, связанных с большими числами Рейнольдса турбулентности. Вследствие вырождения турбулентности это число Рейнольдса с увеличением расстояния от решетки будет уменьшаться, и, соответственно этому, будет изменяться и характер турбулентности.

Таунсендом [22, 21, 7] было произведено много опытов по исследованию вырождения изотропной турбулентности, созданной при помощи решеток. Основываясь на результатах этих измерений, Бэтчелор [21] пришел к выводу, что в действительности можно выделить три различные стадии вырождения: начальную стадию, конечную стадию и переходную стадию. Здесь понятие стадии рассматривается в отношении времени, но в случае турбулентности за решетками оно применяется к последовательно расположенным зонам вниз по течению от решетки.

Насколько долго длится начальная стадия, сказать трудно, так как переход к другим стадиям происходит весьма постепенно, а также потому, что этот переход сильно зависит от начальной величины числа Рейнольдса. Упомянутые выше экспериментальные данные Таунсенда указывают, по-видимому, на то, что турбулентность можно считать находящейся в начальной стадии вплоть до $x_1/M = 100 \div 150$; однако результаты, полученные другими экспериментаторами, показали, что существенные отклонения от закона вырождения для начальной стадии наблюдаются даже на более коротких расстояниях. К обсуждению этого вопроса мы снова возвратимся несколько ниже.

Опыты Таунсенда показали, что конечная стадия соответствует, по-видимому, расстояниям больше $500M$. Конечно, эта величина тоже должна зависеть от начального числа Рейнольдса турбулентности. В опытах Таунсенда число Рейнольдса $Re_M = \bar{U}_1 M / \nu$ составляло около 650.

Процесс вырождения в начальной стадии определяется, главным образом, распадом энергосодержащих вихрей; в конечной стадии влияние вязкости преобладает над инерционными эффектами.

Следовательно, в конечной стадии, когда число Рейнольдса турбулентности очень мало, инерционными членами в динамических уравнениях можно пренебречь; тогда, как уже было показано, можно получить точное решение этих уравнений. Они приводят к функции Гаусса для коэффициента двойной корреляции [уравнение (3.45)]

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right)$$

и к подобному уравнению для спектральной функции [уравнение (3.77)]

$$E(k, t) = \text{const } k^4 \exp(-2\nu k^2 t).$$

Закон вырождения интенсивности турбулентности выражается соотношением [уравнение (3.43)]

$$u'^2 = \text{const } t^{-5/2}.$$

В § 3.4 было показано, что масштабы длины λ_g и Λ_f изменяются пропорционально величине $\sqrt{\nu t}$, а их отношение остается при этом постоянным. Число Рейнольдса турбулентности в процессе вырождения не сохраняет постоянного значения, а изменяется пропорционально $t^{-3/4}$.

Решения (3.45) и (3.77) показывают, что форма кривых $f(r, t)$ и $E(k, t)/E(k, 0)$ в процессе вырождения остается подобной, если r и k относить к единице длины $\sqrt{\nu t}$, так как величины

$$f(r, t) \quad \text{и} \quad \frac{E(k, t)}{E(k, 0)}$$

зависят соответственно только от $r/\sqrt{\nu t}$ и $k\sqrt{\nu t}$. Пропорциональность масштабов λ_g и Λ_f величине $\sqrt{\nu t}$ и вытекающее отсюда постоянство их отношения является следствием подобия этих кривых. Максимальное значение $E(k, t)$ получается при $k^2 \nu t = 1$ или $k = 1/\sqrt{\nu t}$. Кроме того, в этом случае точно выполняется условие

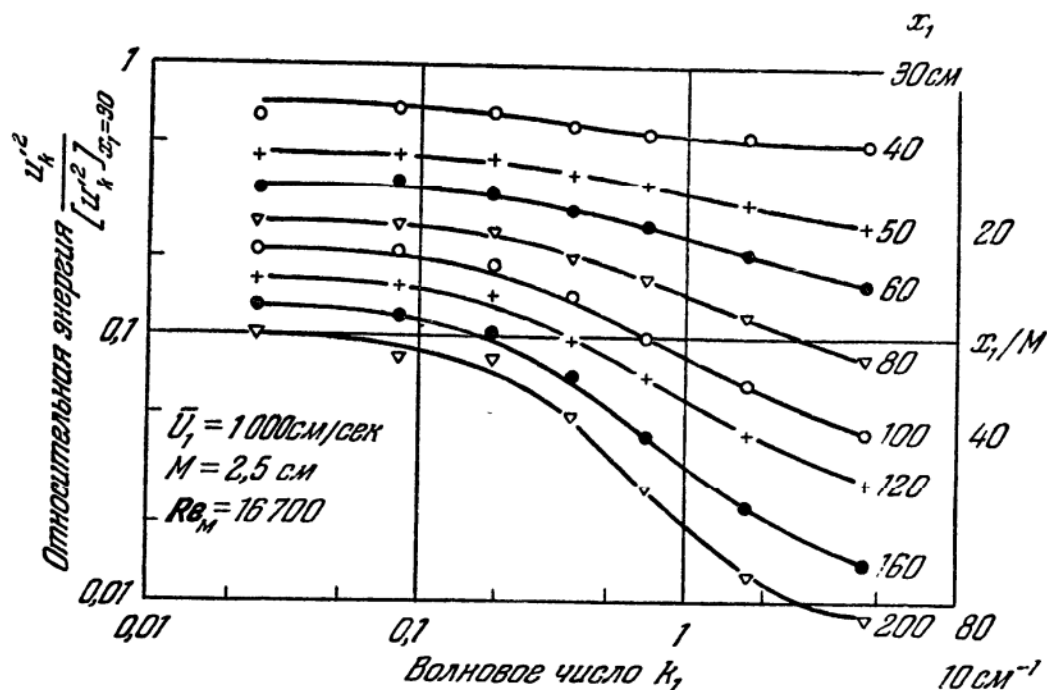


Рис. 3.15. Вырождение энергии компонент спектра [19].

инварианта Лойцянского (3.39), поскольку при использовании в качестве единицы длины величины $\sqrt{\nu t}$ это условие дает

$$u'^2 (\sqrt{\nu t})^5 = \text{const},$$

что в точности совпадает с законом вырождения (3.43).

Естественно, что кривые корреляции и энергетического спектра не будут оставаться подобными, если при их построении не пользоваться единицей длины $\sqrt{\nu t}$. Таким образом, в абсолютных координатах функция $E(k, t)$ по мере возрастания величины волнового числа изменяется быстрее, иными словами, как упоминалось выше, более мелкие вихри вырождаются с большей скоростью.

Это явление возрастания скорости вырождения при увеличении волнового числа не ограничивается только что рассмотренным случаем малых чисел Рейнольдса турбулентности, а является, как это следует из общего динамического уравнения (3.86), общим свойством турбулентности. Это было четко показано Сато [19], который на различных расстояниях от решетки измерил энергию $\overline{u_k^2}$, соответствующую волновому числу k и отнесенную к ее значению в неко-

тором произвольном начальном положении [в данном случае на расстоянии 30 см от решетки (см. рис. 3.15)]. Если скорость вырождения выразить в виде степенной зависимости от расстояния до решетки, то в диапазоне больших волновых чисел показатель степени достигает величины $-\frac{5}{2}$, в отличие от степени -1 для полной кинетической энергии турбулентности. Следовательно, в диапазоне больших волновых чисел интенсивность «вязкого» вырождения (3.43) достигается значительно раньше. Изменение энергетического спектра во времени происходит таким образом, что в области $k \rightarrow 0$ этот спектр с возрастанием времени становится более постоянным, но в области больших волновых чисел интенсивность вырождения с повышением k начинает увеличиваться. Картина изменения энергетического спектра во времени изображена на рис. 3.16.

В случае очень малых чисел Рейнольдса, когда влияние вязкости является преобладающим, изменение энергетического спектра таково, что если в качестве характерной длины выбрать величину $\sqrt{\nu t}$, то энергетический



Рис. 3.16. Изменение энергетического спектра во времени.

спектр, представленный в зависимости от $k \sqrt{\nu t}$, сохраняет подобие. Логично попытаться выяснить, не останется ли энергетический спектр, если выбрать подходящую характерную длину, подобным или автомодельным также и при более высоких числах Рейнольдса. Однако в предыдущем параграфе было показано, что характерная длина для различных диапазонов волновых чисел неодинакова (см. таблицу 3.1). Для равновесной области имеем $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, причем эта же характерная длина может быть выбрана и для области энергосодержащих вихрей, хотя в этом последнем случае можно использовать также и длину $\sqrt{\nu t}$, поскольку выполняется соотношение $\epsilon t^2/\nu = \text{const}$. Тогда для областей, соответствующих меньшим волновым числам, имеем следующие характерные длины: $(\epsilon^3/\epsilon)^{1/4}$ и $(I/\epsilon^2)^{1/3}$. Отсюда следует, что, по-видимому, невозможно выбрать единственную характерную длину для всего диапазона волновых чисел, которая позволила бы сделать энергетический спектр автомодельным в процессе вырождения. Можно лишь предположить, что существует неполная автомодельность, т. е. что автомодельна только некоторая часть энергетического спектра или корреляционной функции. К счастью, эти функции на значительном интервале можно считать автомодельными. Согласно таблице 3.1, это можно сделать для области волновых чисел энергосодержащих

вихрей и области абсолютного равновесия, поскольку они имеют общую характерную длину

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}.$$

Однако известно, что явления в области волновых чисел энергосодержащих вихрей протекают неодинаково с явлениями в области более высоких волновых чисел. Это выражается, помимо всего прочего, еще и тем фактом, что в первой области должно выполняться условие $\varepsilon t^2/\nu = \text{const}$, тогда как для равновесной области это условие вовсе не обязательно. Исходя из этого и желая использовать предположение об автомодельности в диапазоне волновых чисел, включающем в себя основную часть области энергосодержащих вихрей, Гейзенберг [15] ввел дополнительное предположение о том, что эти вихри должны находиться в квазиравновесии и, стало быть, их можно рассматривать, как если бы они пребывали в равновесии, насколько это допустимо с точки зрения их конечной скорости вырождения.

Предположение об автомодельности в зоне, объединяющей равновесную область и основную часть области энергосодержащих

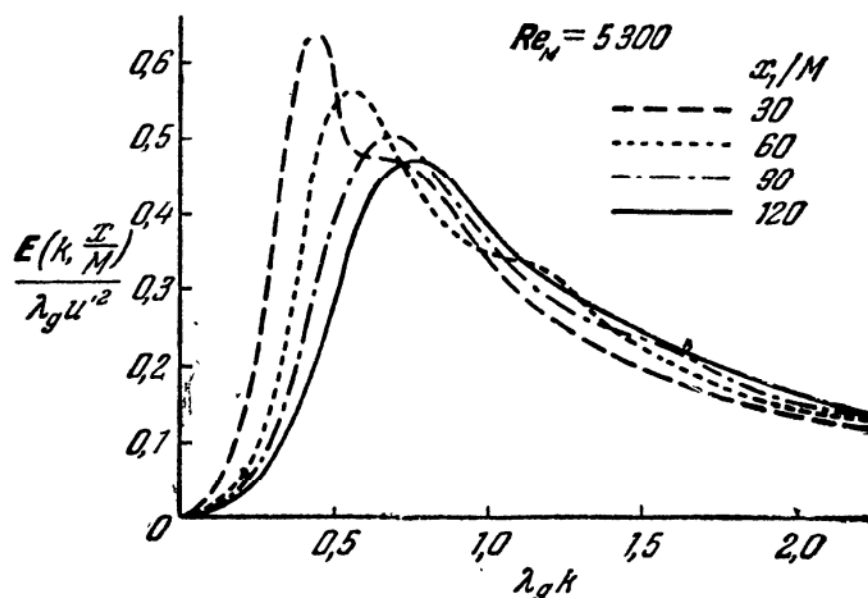


Рис. 3.17. Энергетический спектр в различных стадиях вырождения [17].

вихрей, подтверждается результатами измерений, выполненных Стюартом и Таунсендом [17] при изучении энергетического спектра на различных стадиях вырождения. Эти результаты представлены на рис. 3.17, где в качестве характерной длины вместо η взят масштаб диссипации λ_g ; соотношение между η и λ_g определяется форму-

лой (3.108). Укажем еще, что, согласно таблице 3.1, должно выполняться соотношение

$$E(k, t) = \nu^{5/4} \epsilon^{1/4} E^* \left[k \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] = \tau_1 \nu^2 E^*(k\tau_1).$$

На рис. 3.17 величина $E(k, t)$ нормирована с помощью $\lambda_g u'^2$, а не $\tau_1 \nu^2$, причем связь между u' и ν дается формулой (3.107).

На рис. 3.17 наглядно показано, что в диапазоне низких волновых чисел автомодельности не наблюдается. В то же время представляется возможным предположить существование автомодельности в диапазоне низких волновых чисел, выбирая в качестве характерной длины, например, величину $(I/\epsilon^2)^{1/3}$. Но тогда нарушится автомодельность в диапазоне больших волновых чисел.

Первые измерения при изучении процесса вырождения касались интенсивности турбулентности u' , которая измерялась на различных расстояниях от решетки.

Из формулы (3.35) или (3.37) при $r=0$ либо из (3.94) следует, что

$$\frac{d}{dt} u'^2 = -10\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2}. \quad (3.140)$$

Поскольку величина λ_g тоже зависит от времени, то одного только этого соотношения недостаточно.

Первое предположение, на котором мы остановимся, состоит в том, что вырождение полной энергии определяется, главным образом, вырождением энергосодержащих вихрей. В этом случае имеем дополнительное соотношение $\epsilon t^2/\nu = \text{const}$, т. е.

$$\epsilon = \mathbf{R} \nu t^{-2}. \quad (3.141)$$

Так как $\epsilon = 15\nu u'^2/\lambda_g^2$, то из формул (3.140) и (3.141) вытекает, что

$$\frac{du'^2}{dt} = -\frac{2}{3} \mathbf{R} \nu t^{-2},$$

откуда после интегрирования имеем

$$u'^2 = \frac{2}{3} \mathbf{R} \nu \frac{1}{t} + B. \quad (3.142)$$

Далее, из соотношений (3.140) и (3.142) получаем формулу для масштаба диссипации λ_g :

$$\lambda_g^2 = 10\nu t \left(1 + \frac{3}{2} \frac{Bt}{\nu \mathbf{R}} \right) \quad (3.143)$$

и для числа Рейнольдса Re_λ :

$$\text{Re}_\lambda = \left(\frac{20}{3} \mathbf{R} + \frac{20B}{\nu} t + 15 \frac{B^2}{\nu^2 \mathbf{R}} t^2 \right)^{1/2}, \quad (3.144)$$

или, когда $^{3/2}(B/\nu\mathbf{R})t \ll 1$,

$$\text{Re}_\lambda \approx \sqrt{\frac{20}{3}\mathbf{R}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{B}{\nu\mathbf{R}} t\right). \quad (3.144a)$$

Очевидно, что если постоянная $B \neq 0$, то решение (3.142) может быть справедливо, в лучшем случае, только для конечного интервала времени, так как в конечном счете вся турбулентность при $t = \infty$ должна выродиться до нуля и, кроме того, соотношение (3.141) для конечной стадии вырождения не выполняется.

Если $B > 0$, то эту постоянную можно было бы интерпретировать как энергию крупных перманентных вихрей. Но тогда из формулы (3.143) следовало бы, что величина λ_g^2 должна возрастать сильнее, нежели по линейному закону, а число Рейнольдса Re_λ , согласно (3.144), тоже должно увеличиваться по времени. Насколько можно судить по имеющимся экспериментальным данным, дело обстоит как раз наоборот, а именно: если закон возрастания λ_g и отличается от линейного, то в противоположную сторону (величина λ_g^2 в конечной стадии вырождения должна стать равной $4\nu t$), и, далее, если Re_λ и претерпевает изменение по времени, то Re_λ уменьшается (Re_λ в конечной стадии вырождения изменяется пропорционально $t^{-3/4}$). Следовательно, если постоянная $B \neq 0$, то она должна быть отрицательной величиной; в таком случае получается закон вырождения, предложенный Линем [23, 12]. Согласно Кэрману и Линю [12], отрицательную постоянную можно интерпретировать как отрицательное отклонение энергетического спектра от кривой, соответствующей полной автомодельности, в диапазоне низких волновых чисел. Подобная интерпретация могла бы служить удовлетворительным формальным объяснением, однако с физической точки зрения она является недостаточной. Физический смысл отрицательной постоянной B , хотя и очень малой по величине, остается не совсем ясным.

Если положить $B = 0$, то будем иметь

$$u'^2 = \frac{2}{3} \nu \mathbf{R} t^{-1}, \quad \lambda_g^2 = 10 \nu t$$

и

$$\text{Re}_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}\mathbf{R}} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon t^2}{\nu} = 0,15 \text{Re}_\lambda^2.$$

Предположение о том, что полное вырождение турбулентности определяется главным образом распадом энергосодержащих вихрей, получило некоторое подтверждение в свете экспериментальных фактов, обнаруженных Бэтчелором [11]. Согласно формуле (3.100), которая согласуется с (3.105), величина $(l_e/u'^2)(du'^2/dt)$ в процессе

вырождения должна оставаться постоянной; в первом приближении это, по-видимому, соответствует данным опытов, которые анализировал Бэтчелор.

Другое предположение состоит в том, что величина u'^2 вырождается по некоторому простому степенному закону:

$$u'^2 = Ct^{-n}. \quad (3.145)$$

Тогда из формулы (3.140) следует, что

$$\lambda_g^2 = \frac{10}{n} \nu t \quad (3.146)$$

и

$$\text{Re}_\lambda = \sqrt{\frac{10C}{n\nu}} t^{(1-n)/2}. \quad (3.147)$$

Так как u'^2 и λ_g^2 измеряются независимо друг от друга, то мы, следовательно, располагаем двумя независимыми способами определения величины n .

До сих пор мы пока не воспользовались предположением о частичной автомодельности корреляционной функции или функции энергетического спектра. Выше уже упоминалось, что можно либо ввести предположение об автомодельности спектральной функции в диапазоне волновых чисел $k \geq k_e$, которое соответствует допущению об автомодельности корреляционной функции при $r < r_1$, либо принять автомодельность спектральной функции в диапазоне волновых чисел $k < k_e$, что соответствует предположению об автомодельности корреляционной функции при $r > r_1$.

Экспериментальное исследование спектра турбулентности за двумя последовательно расположенными решетками с различным шагом, проведенное Цуджи [51], показало, что автомодельность энергетического спектра наблюдается лишь в диапазоне больших волновых чисел, а при малых волновых числах подобие, в силу зависимости характеристик турбулентности от начальных условий, отсутствует. Всякие наложенные возмущения, которые могли бы нарушить автомодельность спектра, в диапазоне больших волновых чисел быстро затухают.

Если в диапазоне волновых чисел $k > k_e$ автомодельность спектральной функции возможна, то число Рейнольдса должно быть большим, и тогда, следовательно, имеется существенный диапазон волновых чисел, где вихри находятся в статистическом равновесии. В этом случае в качестве характерной длины можно было бы взять величину $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. Однако вместо нее мы выберем величину λ_g , так как это представляется более удобным. Кроме того, в качестве характерной скорости по той же причине возьмем u' .

Введем в динамическое уравнение Кармана — Хауэрта (3.36) безразмерную величину $\psi = r/\lambda_g$, помня при этом, что λ_g зависит от времени. Предполагая, что $f(r, t)$ и $k(r, t)$ при $r < r_1$, где r_1 достаточно велико, являются функциями только ψ , получаем

$$f \frac{du'^2}{dt} - u'^2 \frac{1}{\lambda_g} \frac{d\lambda_g}{dt} \psi \frac{df}{d\psi} - \frac{u'^3}{\lambda_g} \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} (\psi^4 k) = 2\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2} \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} \left(\psi^4 \frac{df}{d\psi} \right),$$

или, учитывая формулу (3.140),

$$-10\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2} f - u'^2 \frac{1}{\lambda_g} \frac{d\lambda_g}{dt} \psi \frac{df}{d\psi} - \frac{u'^3}{\lambda_g} \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} (\psi^4 k) = 2\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2} \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} \left(\psi^4 \frac{df}{d\psi} \right),$$

или

$$10f + \frac{\lambda_g}{\nu} \frac{d\lambda_g}{dt} \psi \frac{df}{d\psi} + \frac{u'\lambda_g}{\nu} \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} (\psi^4 k) + 2 \frac{1}{\psi^4} \frac{d}{d\psi} \left(\psi^4 \frac{df}{d\psi} \right) = 0.$$

Это соотношение может выполняться для всех значений ψ только в том случае, когда все коэффициенты пропорциональны друг другу. Следовательно,

$$\frac{\lambda_g}{\nu} \frac{d\lambda_g}{dt} = \text{const} \quad (3.148)$$

и

$$\frac{u'\lambda_g}{\nu} = \text{Re}_\lambda = \text{const}. \quad (3.149)$$

Уравнения (3.140) и (3.148) могут быть решены относительно λ_g^2 и u'^2 . Эти решения, подчиненные условию (3.149), записываются так:

$$\lambda_g^2 = 10\nu t + C = 10\nu (t - t_0), \quad (3.150)$$

$$u'^2 = \frac{\text{const}}{C + 10\nu t} = \frac{\text{const}}{10\nu (t - t_0)}; \quad (3.151)$$

при этом постоянная C принята равной $-10\nu t_0$.

Эти решения согласуются с уравнениями (3.145) — (3.147) при условии, что $n = 1$, и с уравнениями (3.142) — (3.144) при условии, что $B = 0$.

Гейзенберг [15] сделал попытку получить решение динамического уравнения для энергетического спектра $E(k, t)$ в диапазоне больших волновых чисел, включая область энергосодержащих вихрей. Он принял предположения, во-первых, о «квази»-равновесии этих вихрей и, во-вторых, об автомодельности энергетического спектра. Так как Гейзенберг рассматривал диапазон больших волновых чисел, то использованное им исходное динамическое уравнение записывается

в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_k^\infty E(k, t) dk = \int_k^\infty F(k, t) dk - 2\nu \int_k^\infty k^2 E(k, t) dk.$$

В рассматриваемом диапазоне волновых чисел величины ϵ , ν и t являются фундаментальными параметрами, поэтому число Рейнольдса турбулентности должно оставаться постоянным, ибо только два из этих трех параметров могут быть независимыми. Если в качестве независимых фундаментальных параметров выбрать ν и t , то спектральные функции $E(k, t)$ и $F(k, t)$ должны иметь вид (см. таблицу 3.1)

$$E(k, t) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t}} E^*(k \sqrt{\nu t}) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t}} E^*(\chi),$$

$$F(k, t) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t^3}} F^*(k \sqrt{\nu t}) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t^3}} F^*(\chi),$$

где $E^*(\chi)$ и $F^*(\chi)$ — универсальные функции от $\chi = k \sqrt{\nu t}$ и постоянного числа Рейнольдса турбулентности.

Далее, Гейзенберг для $\int_\chi^\infty F^*(\chi) d\chi$ принял соотношение (3.121):

$$\int_\chi^\infty F^*(\chi) d\chi = - \int_0^\chi F^*(\chi) d\chi = 2\alpha \int_\chi^\infty \sqrt{\frac{E^*(\chi)}{\chi^3}} d\chi \int_0^\chi \chi^2 E^*(\chi) d\chi.$$

Ни Гейзенбергу, ни, например, Чандрасекару [16], Праудмену [18] или Ротта [24] решения в замкнутой форме получить не удалось. Гейзенберг показал, что все решения для $E^*(\chi)$ линейны по χ при $\chi \rightarrow 0$ и что в случае больших значений числа Рейнольдса решение при больших величинах χ асимптотически стремится к зависимости $\chi^{-5/3}$. Чандрасекар, Праудмен и Ротта дали численные решения уравнения для $E^*(\chi)$ при определенных значениях числа Рейнольдса. Получено семейство кривых, которые при малых величинах χ удовлетворяют линейным соотношениям

$$E^*(\chi) = 4\chi, \quad \text{когда } \chi \rightarrow 0,$$

и

$$E(k, t) = 4\nu^2 k, \quad \text{когда } k \rightarrow 0.$$

Для предельного случая бесконечно большого числа Рейнольдса Чандрасекар получил при $\chi \rightarrow \infty$

$$E^*(\chi) \sim \left(\frac{8\epsilon t^2}{9\alpha\nu} \right)^{2/3} \chi^{-5/3} \quad \text{и} \quad E(k, t) \sim \left(\frac{8\epsilon}{9\alpha} \right)^{2/3} k^{-5/3}.$$

Эти результаты согласуются с выводами, полученными в предыдущем параграфе, за исключением того, что при $k \rightarrow 0$ решением является также зависимость $E(k, t) = 4\nu^2 k$, а не $E(k, t) \sim k^4$ и что это решение все же содержит вязкость ν ; последнее обстоятельство с физической точки зрения оказывается не очень приемлемым и противоречит концепции Кармана и Линя [12] (см. таблицу 3.1). Более того, весьма проблематично, выполняются ли предположения о квазиравновесии и автомодельности в «линейном» диапазоне малых волновых чисел более крупных вихрей. В этой связи можно рекомендовать ознакомиться, например, с экспериментальными результатами Цуджи [51], на которые мы уже ссылались выше.

На основании численных решений для $E(k, t)$ Праудмен [18] вычислил коэффициент продольной корреляции $f(r, t)$, который сравнил затем с экспериментальными данными Таунсенда и Стюарта, положив при этом $\alpha = 0,40$. Согласование оказалось весьма удовлетворительным, но при этом следует иметь в виду, что форма корреляционных кривых, как уже отмечалось, очень нечувствительна к предположениям, принятым при решении уравнений турбулентности.

Предположение об автомодельности энергетического спектра в диапазоне больших волновых чисел, включая область энергосодержащих вихрей, которое подразумевает, что число Рейнольдса турбулентности остается в процессе вырождения постоянным, означает также, что отношения различных масштабов, например λ_g/l_e [см. (3.109)], λ_g/Λ_f или λ_g/Λ_g , должны сохраняться постоянными. Тот же результат получается из уравнения Кармана — Хауэрта в предположении о том, что функции $f(r, t)$ и $k(r, t)$ при $r < r_1$, где r_1 — достаточно большая величина, зависят только от $\varphi = r/\Lambda_g$; однако Λ_g все же остается функцией времени.

При $\varphi = r/\Lambda_g(t)$ уравнение (3.36) записывается так:

$$\Lambda_g \frac{1}{u'^3} \frac{du'^2}{dt} f - \frac{1}{u'} \frac{d\Lambda_g}{dt} \varphi \frac{df}{d\varphi} - \frac{1}{\varphi^4} \frac{d}{d\varphi} (\varphi^4 k) = \frac{2\nu}{u' \Lambda_g} \frac{1}{\varphi^4} \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi^4 \frac{df}{d\varphi} \right).$$

Это уравнение может быть удовлетворено при любых значениях φ лишь в том случае, если его коэффициенты, которые зависят только от времени, имеют постоянные отношения; а так как один из коэффициентов представляет собой численную постоянную, то все они тоже должны быть численными постоянными:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_g}{u'^3} \frac{du'^2}{dt} &= -2\Lambda_g \frac{d}{dt} \frac{1}{u'} = -2A, \\ \frac{1}{u'} \frac{d\Lambda_g}{dt} &= B, \quad \frac{u' \Lambda_g}{\nu} = C, \end{aligned}$$

Эти соотношения совместны, если только $B = A$. Решения для u' и Λ_g имеют вид

$$\frac{1}{u'^2} = \frac{2A}{C\nu} t + \text{const},$$

$$\Lambda_g^2 = C^2 \nu^2 \left(\frac{2A}{C\nu} t + \text{const} \right),$$

что снова указывает на линейную зависимость $1/u'^2$ и Λ_g^2 от t . Кроме того, согласно уравнению (3.140),

$$\frac{\lambda_g^2}{\Lambda_g^2} = \frac{5}{AC} = \text{const}.$$

Различные исследователи, рассматривая случай предельно больших чисел Рейнольдса турбулентности, пользовались предположением о том, что вязким членом в динамическом уравнении можно пренебречь. В этом случае величина λ_g крайне мала, и ее больше нельзя использовать в качестве характерной длины; следовательно, в качестве такой длины приходится выбрать l_e или Λ_g . Далее, можно принять, что в диапазоне $r_0 < r < r_1$, где r_0 — крайне малая величина, а r_1 — наоборот, очень большая, имеет место автомодельность корреляционных кривых.

Тогда получаются те же условия:

$$\Lambda_g \frac{d}{dt} \frac{1}{u'} = A \quad \text{и} \quad \frac{1}{u'} \frac{d\Lambda_g}{dt} = B,$$

но условие $u' \Lambda_g / \nu = \text{const}$ больше не выполняется. Из указанных выше двух условий следует, что

$$\frac{\Lambda_g}{u'} = (A + B) t + \text{const}.$$

Обратимся к экспериментальным данным о вырождении изотропной турбулентности. В тридцатых годах различными исследователями было получено большое количество данных о турбулентности, созданной с помощью решеток. К сожалению, не все эксперименты проводились при одинаковых условиях, что особенно касается формы использовавшихся при этом решеток. Применялись решетки с одним или двумя рядами круглых и квадратных стержней, плоских полос (лент) и т. д., с различными размерами ячеек, диаметром или шириной стержней.

Исходя из соображений размерности, можно полагать, что характеристики турбулентности должны зависеть от относительного расстояния x_1/M , от отношения размера ячейки к ширине стержня M/d , от формы стержней или отверстий, а также от того, имеют ли ячейки форму щели (один ряд стержней) или форму квадрата (два ряда

стержней). По всей вероятности, влияние формы стержней проявляется слабее, нежели влияние прочих параметров.

Характеристики турбулентности логично сопоставить с характеристиками турбулизирующей решетки. Характеристики решетки включают в себя геометрию решетки и ее коэффициент сопротивления, поскольку энергия турбулентности образуется именно за счет работы, совершаемой жидкостью для преодоления этого сопротивления. Исходя из этого, Бэтчелор и Таунсенд [21] предложили следующее соотношение, основанное на «линейном» законе вырождения:

$$\frac{\bar{U}_1^2}{u_1'^2} = \frac{c}{C_D} \left[\frac{x_1}{M} - \left(\frac{x_1}{M} \right)_0 \right], \quad (3.152)$$

где C_D — сопротивление, отнесенное к единице площади решетки, а c — постоянная, зависящая от геометрии решетки. На основании многих измерений величины C_D для решеток с квадратными ячейками из круглых стержней было получено следующее соотношение:

$$C_D = \frac{\frac{d}{M} \left(2 - \frac{d}{M} \right)}{\left(1 - \frac{d}{M} \right)^4}$$

и $c \approx 106$.

Для обычно используемых решеток с квадратными ячейками, т. е. решеток с $M/d \approx 5 \div 6$, имеем $c/C_D \approx 135$.

Можно отметить, что при больших значениях M/d параметром длины вместо M становится d .

Измерения трех компонент $u_1'^2$, $u_2'^2$ и $u_3'^2$ показали [22], что турбулентность за решеткой с квадратными ячейками становится практически изотропной при $x_1/M = 10 \div 15$. Эта величина в свою очередь тоже должна зависеть от геометрии решетки, особенно от отношения M/d . Можно ожидать, что при уменьшении величины M/d изотропность будет достигаться на все более коротких относительных расстояниях, вплоть до некоторого минимального расстояния, пока размер «струй», вытекающих из отверстий решетки, не станет примерно равным ширине стержня, т. е. $M/d \approx 2$. Для сравнения с теориями изотропной турбулентности в случае обычно применяемых решеток с уверенностью можно рассматривать лишь измерения при $x_1/M > 20$, но иногда приходится брать еще более высокие значения x_1/M .

Кроме отклонений от изотропности, наблюдаются также отклонения от однородности в плоскостях, перпендикулярных к осредненному течению, которые обусловлены наличием струй и аэродинамического следа за решеткой. Грант и Нисбет [53] наблюдали значительные отклонения от однородности вплоть до $x_1/M = 80$. По их мнению,

эти отклонения являются причиной расхождения результатов измерений различных экспериментаторов, исследовавших начальную стадию процесса вырождения.

В настоящее время по этому вопросу имеются экспериментальные данные, полученные Драйденом и его сотрудниками [26], Холлом [27], Бэтчелором и Таунсендом [7, 21, 22, 11], Бэйнесом и Петерсоном [28], Сато [19], Цуджи [51] и Ван дер Хегге Цийненом [54]. В этих опытах производились измерения величины $u'_1/\bar{U}_1$ на различных расстояниях от решеток, а некоторые исследователи определяли также микромасштаб λ_f или λ_g и интегральный масштаб Λ_f или Λ_g .

Представляет интерес посмотреть теперь, насколько близко согласуются с действительными кривыми рассмотренные выше законы вырождения. Эти реальные кривые вырождения носят очень монотонный характер, и если для описания процесса вырождения пользоваться простой функцией (3.145), то показатель степени n испытывает постепенное изменение. Кроме того, количество экспериментальных точек для каждой кривой в большинстве случаев слишком мало для надежного и безошибочного построения кривой статистическим методом. Однако все же попытаемся более или менее близко аппроксимировать отдельные участки кривой вырождения одним из теоретических законов вырождения.

Итак, результаты всех этих измерений показывают, что в начальной стадии вырождения величина $(\bar{U}_1/u'_1)^2$ почти линейно возрастает с увеличением расстояния от сетки, если число Рейнольдса, отнесенное к размеру ячейки

$$\text{Re}_M = \frac{\bar{U}_1 M}{\nu},$$

а следовательно, и начальное число Рейнольдса турбулентности велики и если, по изложенным выше соображениям, исключить из рассмотрения экспериментальные данные для значений x_1/M , не превышающих, скажем, 20.

Некоторые из этих экспериментальных данных представлены ниже. На рис. 3.18, *а* и *б* показано вырождение величины $u'_1/\bar{U}_1$ с увеличением x_1/M по опытам, соответственно, Бэтчелора и Таунсенда [21] и Бэйнеса и Петерсона [28]. Результаты, полученные Бэтчелором и Таунсендом, особенно хорошо аппроксимируются линейным законом возрастания величины $(\bar{U}_1/u'_1)^2$ в зависимости от x_1/M ; правда, в одном из исследованных случаев при $x_1/M \approx 200$ наблюдается отклонение от линейной зависимости в сторону большей скорости вырождения. По всей вероятности, на этом расстоянии начиналась переходная стадия вырождения. Ту же линейную зависимость можно обнаружить и по результатам опытов Цуджи и других исследователей, хотя несколько больший разброс экспериментальных точек определенно дает

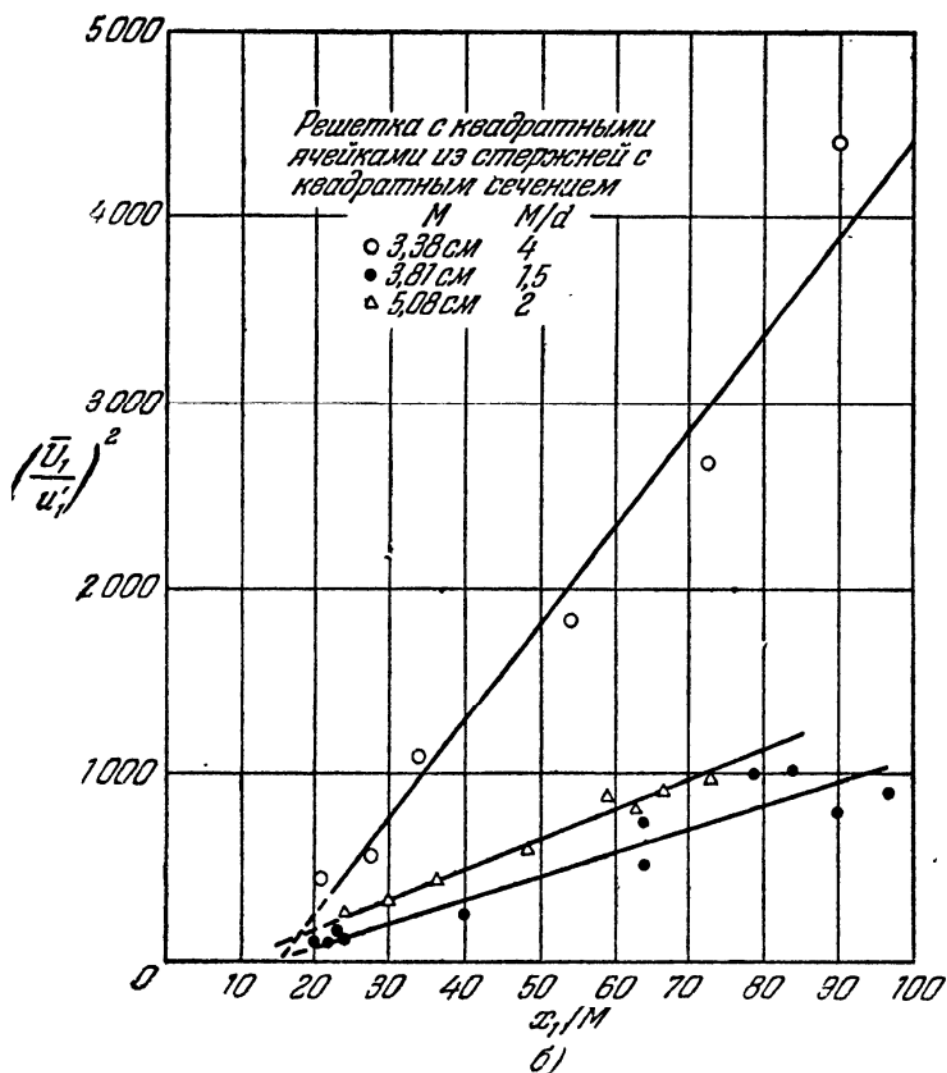
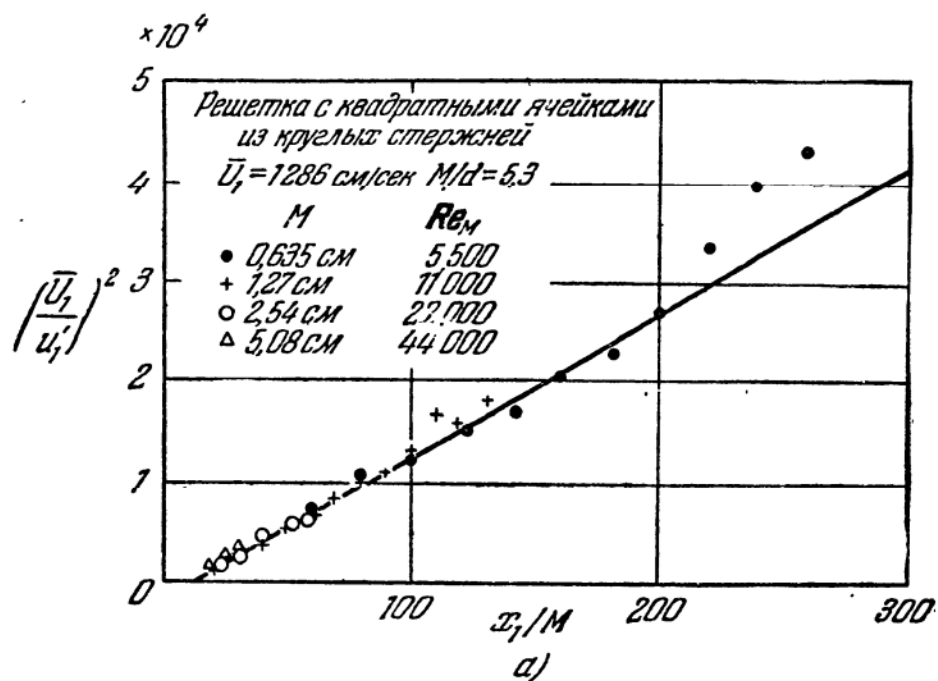


Рис. 3.18. Вырождение $u'_1 / \bar{U}_1$ вниз по потоку от решетки:
 а) по Бэтчелору и Таунсенду [21]; б) по Бэйнесу и Петерсону [28].

возможность аппроксимировать опытные данные и кривыми, отличными от линейного закона. Расстояние от решетки до воображаемого начала координат, для которого $\bar{U}_1/u'_1 = 0$, по-видимому, возрастает с увеличением M/d ; для решеток с $M/d = 4 \div 5$ воображаемое начало отсчета находится при $(x_1/M)_0 \approx 10$. Угол наклона прямых линий в координатах $(\bar{U}_1/u'_1)^2 - x_1/M$ для различных значений M/d неодинаков, как это и должно быть согласно уравнению (3.152).

Бэтчелор и Таунсенд [7] провели также измерения при малых числах Рейнольдса (отнесенных к размеру ячеек решетки), с тем

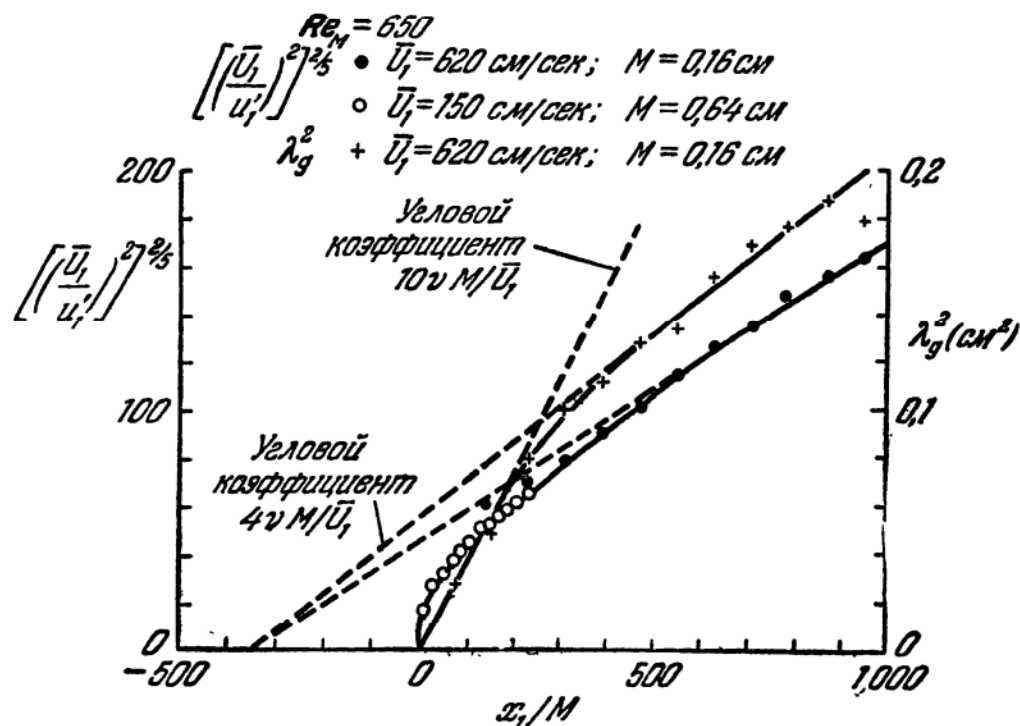


Рис. 3.19. Вырождение $u'_1/\bar{U}_1$ в конечной стадии [7].

чтобы исследовать конечную стадию вырождения, в которой, согласно теории, величина $(\bar{U}_1/u'_1)^2$ должна изменяться пропорционально $t^{5/2}$, а $\lambda_g^2 = 4\nu t$. Результаты этих измерений представлены на рис. 3.19. Они показывают, что при малых начальных числах Рейнольдса конечная стадия вырождения наступает лишь на расстояниях, превышающих $x_1/M = 600$.

На рис. 3.20 изображена зависимость $\lambda_g^2 \bar{U}_1 / 10\nu M$ от x_1/M . Согласно соотношению (3.150), проведенные здесь прямые линии должны иметь наклон в 45° . Экспериментальные данные подтверждают это; отсюда можно сделать вывод, что [см. уравнения (3.146) и (3.145)] в начальной стадии действительно наблюдается линейный закон вырождения величины $(\bar{U}_1/u'_1)^2$ и что опыт указывает на существование

отличного от нуля значения постоянной B в формуле (3.143), которая должна быть не очень мала и не отрицательна. Кроме того, можно заметить, что и в этом случае действительное начало координат для линий, соответствующих решеткам, для которых величина M/d лежит в пределах от 4 до 5, находится вблизи $x_1/M \approx 10$.

Так как в начальной стадии вырождения величина $(\bar{U}_1/u'_1)^2$, как и λ_g^2 , изменяется пропорционально t , число Рейнольдса турбулентности Re_λ на протяжении этой стадии остается постоянным.

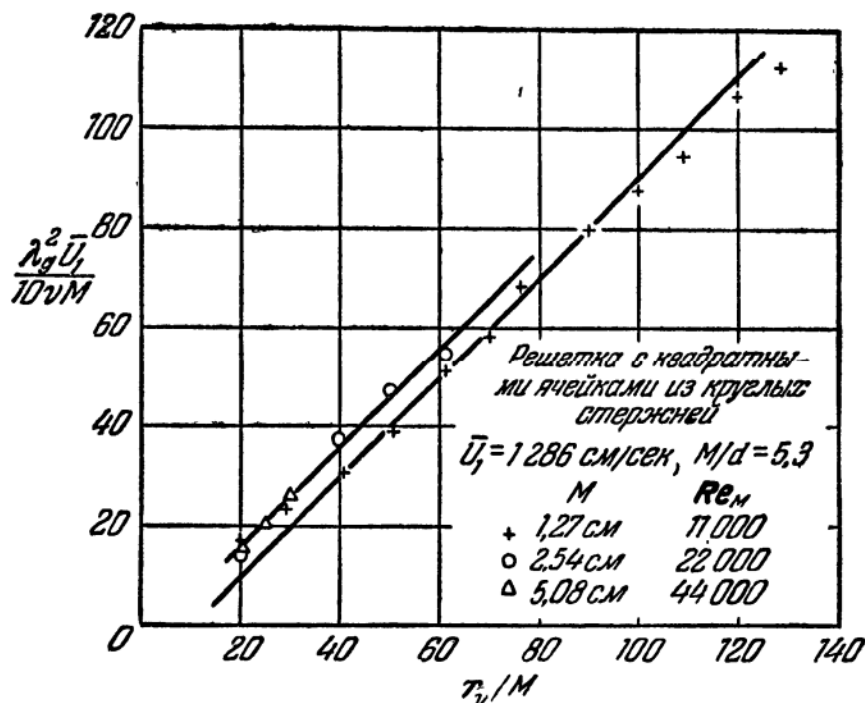


Рис. 3.20. Увеличение λ_g с расстоянием вниз по потоку от решетки [21].

Из всех этих результатов можно сделать вывод, что в рассмотренных опытах ход вырождения, описываемый протеканием зависимостей $\bar{U}_1/u'_1$ и λ_g от времени, соответствует определенной степени приближения к гипотезе о квазиравновесии и автомодельности в диапазоне больших волновых чисел, включая энергосодержащие вихри. Это противоречит тому факту, что имевшие место во всех этих опытах значения Re_λ были значительно ниже точных значений, необходимых для установления статистического равновесия турбулентности.

Этот вывод, по-видимому, находится в противоречии с результатами, перечисленными в конце предыдущего параграфа. Однако этим подтверждается только то, что ход изменения относительной интенсивности турбулентности и различных ее масштабов является слишком грубой характеристикой действительного развития структуры

турбулентности, которое значительно лучше передается, например, точной формой энергетического спектра или некоторыми безразмерными отношениями различных производных высшего порядка от турбулентной пульсации скорости [30].

§ 3.7. Скалярное поле при изотропной турбулентности

Попытаемся теперь распространить анализ, проведенный в предыдущих параграфах, на тот случай, когда изменяющаяся величина является не вектором (как скорость или импульс), а скаляром, как, например, температура, или энтальпия, либо концентрация смешиваемых жидкостей. Изучение развития такого скалярного поля, наряду с анализом поля скорости, несомненно, представляет интерес, так как оно может дать результаты, которые послужат основой для исследования процессов перемешивания.

В отличие от случая изотропного поля турбулентных пульсаций скорости, изучение соответствующего скалярного поля лишь недавно было предпринято немногими исследователями. Первыми публикациями по этому вопросу являются, видимо, работы советских ученых [31, 32]; вслед за ними появились статьи Корсина [33, 34]. Все эти работы целиком носят теоретический характер; единственные пока экспериментальные данные были опубликованы недавно Кистлером, О'Брайеном и Корсином [35].

Обозначим, как это было принято в главе 1, через величину Γ полное мгновенное значение некоторой скалярной величины, а через γ — пульсацию Γ около среднего значения $\bar{\Gamma}$. Поле скорости и скалярное поле будем считать изотропными и однородными, так что величина $\bar{\Gamma}$ постоянна по всему полю.

Как показали Кистлер, О'Брайен и Корсин, такое изотропное скалярное поле, наложенное на изотропное поле скорости, может быть реализовано посредством введения в поток решетки с нагретыми стержнями. На некотором расстоянии от этой нагретой решетки температурное поле, как и поле скоростей, достигает условий изотропности.

Теоретическое исследование турбулентного скалярного поля можно осуществить таким же путем, как и в случае поля турбулентной скорости; в результате получаются геометрические и динамические соотношения. По этой причине вывод указанных соотношений удастся сильно сократить.

Что касается обозначений, то мы будем пользоваться теми же символами, которые были введены для соответствующих величин в случае скоростного поля течения, отмеченными, однако, внизу индексами γ с целью указать на принадлежность к скалярной величине. Тогда, в отличие от индексов i, j, k и т. д., γ является фиксированным индексом и повторение индекса γ не означает суммирования.

Корреляции. Как и в случае поля турбулентной скорости, для описания геометрических соотношений, характеризующих структуру скалярного поля, используем корреляции между изменяющимися величинами в двух точках этого поля.

Рассмотрим двойную корреляцию

$$[Q_{\gamma, \gamma}(r, t)]_{A, B} = \overline{\gamma_A \gamma_B} \quad (3.153)$$

и ее коэффициент

$$[R_{\gamma, \gamma}(r, t)]_{A, B} = \frac{\overline{\gamma_A \gamma_B}}{\gamma'^2}, \quad (3.154)$$

где γ_A и γ_B — значения γ соответственно в точках A и B , расположенных друг от друга на расстоянии r , а $\gamma' = \sqrt{\overline{\gamma_A^2}} = \sqrt{\overline{\gamma_B^2}}$ — среднеквадратичная величина, или интенсивность, пульсаций γ .

Эта двойная корреляция представляет собой тензор нулевого ранга, т. е. скаляр, и зависит от расстояния r и времени t . Чтобы упростить систему обозначений, мы будем опускать в дальнейшем знак зависимости от времени во всех тех случаях, когда время, как таковое, несущественно для рассматриваемых, например чисто геометрических, соотношений.

Поскольку при замене r на $-r$ величина $Q_{\gamma, \gamma}(r)$ не изменяет своего знака, то она, как и соответствующий ей коэффициент корреляции $R_{\gamma, \gamma}(r)$, должна быть четной функцией r . Следовательно, разложение коэффициента $R_{\gamma, \gamma}(r)$ в ряд по r должно содержать только члены с четными степенями r :

$$R_{\gamma, \gamma}(r) = 1 + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 R_{\gamma, \gamma}}{\partial r^2} \right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 R_{\gamma, \gamma}}{\partial r^4} \right]_{r=0} + \dots, \quad (3.155)$$

где

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 R_{\gamma, \gamma}}{\partial r^2} \right]_{r=0} &= \frac{1}{\gamma'^2} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\overline{\gamma_A \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} \right)_B} \right], \\ \left[\frac{\partial^4 R_{\gamma, \gamma}}{\partial r^4} \right]_{r=0} &= \frac{1}{\gamma'^2} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\overline{\gamma_A \left(\frac{\partial^4 \gamma}{\partial r^4} \right)_B} \right]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Вторая производная $[\partial^2 R_{\gamma, \gamma} / \partial r^2]_{r=0}$ является мерой кривизны корреляционной кривой в точке $r = 0$. Обозначим через λ_γ отрезок оси абсцисс, заключенный между началом координат и точкой пересечения этой оси с параболой, соприкасающейся с корреляционной кривой в ее вершине. Тогда

$$\left[\frac{\partial^2 R_{\gamma, \gamma}}{\partial r^2} \right]_{r=0} = -\frac{2}{\lambda_\gamma^2}. \quad (3.156)$$

Величину λ_γ , подобно λ_g или λ_f , можно интерпретировать как микромасштаб пульсаций γ .

Кроме того, определим интегральный масштаб пульсаций γ как

$$\Lambda_\gamma = \int_0^\infty R_{\gamma, \gamma}(r) dr. \quad (3.157)$$

Помимо двойной корреляции между значениями γ в двух точках, имеются также двойные корреляции между γ в одной точке и компонентой скорости в другой точке. Когда эти две точки совпадают, т. е. когда имеем корреляцию между пульсацией γ и пульсацией скорости в одной и той же точке, то эта корреляция обращается в нуль:

$$\overline{(u_i)_A \gamma_A} = 0,$$

ибо эта корреляция должна быть инвариантна при отражении. Физический смысл этого факта состоит в том, что корреляция $\overline{(u_i)_A \gamma_A}$ является мерой переноса субстанции Γ под действием турбулентности [см. уравнение (1.29)], но этот перенос отсутствует, так как величина Γ постоянна.

Более того, эта корреляция должна обращаться в нуль также и для двух не совпадающих одна с другой точек:

$$\overline{(u_i)_A \gamma_B} = 0; \quad (3.158)$$

это следует из условия, что дивергенция тензора первого ранга в случае несжимаемой жидкости стремится к нулю. Это уже было показано для аналогичной корреляции $\overline{(u_i)_A p_B}$ [см. уравнение (3.6)].

Так как соотношение (3.158) справедливо для любого значения r , то отсюда следует, что

$$\overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n} \right)_B} = 0,$$

так же как и

$$\overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n} \right)_A \gamma_B} = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\left(u_i \frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n} \right)_A} = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n} \right)_B} = 0$$

и

$$\overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n} \gamma \right)_B} = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n} \right)_A \gamma_B} = 0. \quad (3.159)$$

Тройные корреляции между γ и компонентами скорости в двух точках записываются в виде

$$\overline{(u_i)_A \gamma_A \gamma_B} \quad \text{и} \quad \overline{(u_i)_A (u_j)_B \gamma_B}.$$

Они образуют тензоры соответственно первого и второго рангов. В дальнейшем для нас будет представлять интерес только первая из этих корреляций, которая, как это будет показано ниже, появляется в динамическом уравнении для $\mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(r, t)$.

Если обе точки совпадают, то тройная корреляция обращается в нуль:

$$\overline{(u_i \gamma^2)_A} = 0 \quad (3.160)$$

по той же причине, что и $\overline{(u_i \gamma)_A} = 0$. И кроме того, по аналогии с (3.158) имеем соотношение

$$\overline{(u_i)_A \gamma_B^2} = 0. \quad (3.161)$$

Рассмотрим теперь следующую обобщенную тройную корреляцию:

$$[\mathbf{S}_\gamma]_{A, B} = \overline{\gamma_B \gamma_A (u_a)_A} = \overline{\gamma_B \gamma_A (u_i)_A} e_{ai} = [\mathbf{S}_{\gamma i, \gamma}]_{A, B} e_{ai}. \quad (3.162)$$

Применяя к тензору первого ранга $[\mathbf{S}_{\gamma i, \gamma}]_{A, B}$ теорию инвариантов в том виде, как она изложена в § 3.2, получаем соотношение [см. уравнение (3.5)]

$$[\mathbf{S}_{\gamma i, \gamma}]_{A, B} = \gamma'^2 u' \frac{k_\gamma(r)}{r} \xi_i, \quad (3.163)$$

где $k_\gamma(r)$ — коэффициент пространственной корреляции между γ_B , γ_A и компонентой скорости $(u_r)_A$ в точке A в направлении r :

$$k_\gamma(r) = \frac{\overline{\gamma_B \gamma_A (u_r)_A}}{\gamma'^2 u'}. \quad (3.164)$$

Этот коэффициент является нечетной функцией r ; следовательно, его разложение в ряд имеет вид

$$k_\gamma(r) = r \left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r} \right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 k_\gamma}{\partial r^3} \right]_{r=0} + \dots, \quad (3.165)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma'^2 u' \left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r} \right]_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\overline{\gamma_A (u_r)_A \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)_B} \right], \\ \gamma'^2 u' \left[\frac{\partial^3 k_\gamma}{\partial r^3} \right]_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\overline{\gamma_A (u_r)_A \left(\frac{\partial^3 \gamma}{\partial r^3} \right)_B} \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $[\partial k_\gamma / \partial r]_{r=0} = 0$. Так как $\overline{(u_r)_A \gamma_B^2} = 0$ [см. соотношение (3.161)], то имеем

$$\overline{(u_r)_A \frac{\partial}{\partial r} \gamma_B^2} = 2 \overline{(u_r)_A \gamma_B \frac{\partial \gamma_B}{\partial r}} = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\left(u_r \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_A} = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{(u_r)_A \gamma_B \frac{\partial \gamma_B}{\partial r}} = 0,$$

так что

$$\left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r}\right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2 u'} \left[\gamma_A (u_r)_A \frac{\partial \gamma_B}{\partial r}\right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2 u'} \overline{\left(\gamma u_r \frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_A} = 0.$$

Этот результат указывает на то, что разложение функции $k_\gamma(r)$ в ряд начинается с члена r^3 , точно так же, как в ряде для тройной корреляции скорости [см. формулу (3.22)]:

$$k_\gamma(r) = \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 k_\gamma}{\partial r^3}\right]_{r=0} + \frac{r^5}{5!} \left[\frac{\partial^5 k_\gamma}{\partial r^5}\right]_{r=0} + \dots \quad (3.166)$$

Динамическое уравнение для $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$. В качестве исходного соотношения используем уравнение диффузии и конвекции субстанции Γ [см. уравнение (1.27)], предполагая при этом, что коэффициент молекулярного переноса f постоянен. Если Γ означает количество тепла на единицу массы $c_p \Theta$, то $f = K/\rho c_p$, где K — коэффициент теплопроводности жидкости. Если Γ — концентрация, то величина f означает коэффициент молекулярной диффузии. Итак,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = f \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Будем считать, что $\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma$ и $U_i = \bar{U}_i + u_i$, понимая при этом величины $\bar{\Gamma}$ и $\bar{U}_i$ как постоянные по всему полю. Тогда

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = f \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \gamma.$$

Рассмотрим это уравнение для двух точек A и B . Умножив обе части этого уравнения для точки A на γ_B , а обе части уравнения для точки B на γ_A , сложив затем оба уравнения почленно и произведя осреднение по времени, после выполнения тех же операций, что и при выводе уравнения (1.40,) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\gamma_A \gamma_B} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \overline{\gamma_A \gamma_B (u_i)_B} = 2f \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_i} \overline{\gamma_A \gamma_B}. \quad (3.167)$$

Последовательность действий в процессе этого вывода такова:

$$\begin{aligned} \gamma_B \frac{\partial \gamma_A}{\partial t} + \bar{U}_i \gamma_B \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right)_A + \gamma_B \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \gamma\right)_A &= f \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\right)_A \gamma_A \gamma_B, \\ \gamma_A \frac{\partial \gamma_B}{\partial t} + \bar{U}_i \gamma_A \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right)_B + \gamma_A \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \gamma\right)_B &= f \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\right)_B \gamma_A \gamma_B. \end{aligned}$$

Складывая соответственно левые и правые части этих уравнений и осредняя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\gamma_A \gamma_B} + \bar{U}_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_A + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_B \right] \overline{\gamma_A \gamma_B} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \overline{(u_i)_A \gamma_A \gamma_B} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B \overline{(u_i)_B \gamma_A \gamma_B} = f \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_B \right] \overline{\gamma_A \gamma_B}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \overline{(u_i)_A \gamma_A \gamma_B} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B \overline{(u_i)_B \gamma_B \gamma_A},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\gamma_A \gamma_B} + \bar{U}_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_A + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_B \right] \overline{\gamma_A \gamma_B} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \overline{(u_i)_A \gamma_A \gamma_B} = \\ = f \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_B \right] \overline{\gamma_A \gamma_B}.$$

Если ввести обозначения

$$\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B = - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A = \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\gamma_A \gamma_B} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \overline{\gamma_B \gamma_A (u_i)_A} = 2f \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} \overline{\gamma_A \gamma_B}.$$

Используя соотношения (3.153) и (3.162), можем записать

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{S}_{\gamma i, \gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \\ = 2f \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} \mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \quad (3.168)$$

Введем скаляр $\mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*$, определяемый формулой

$$\mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{S}_{\gamma i, \gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad (3.169)$$

и воспользуемся уравнением (3.163); тогда

$$\mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^* = \gamma'^2 u' \left[2 \frac{\mathbf{k}_\gamma}{r} + \frac{\partial \mathbf{k}_\gamma}{\partial r} \right] = \gamma'^2 u' \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{k}_\gamma). \quad (3.170)$$

Так как величины $\mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*$ и $\mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}$ зависят только от r и t , то уравнение (3.168) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(r, t) - 2 \mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(r, t) = 2f \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(r, t) \right], \quad (3.171)$$

или, если ввести коэффициенты корреляции,

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma'^2 \mathbf{R}_{\gamma, \gamma}(r, t) - 2 \gamma'^2 u' \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \mathbf{k}_\gamma(r, t)] = \\ = 2f \gamma'^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \mathbf{R}_{\gamma, \gamma}(r, t)}{\partial r} \right] \quad (3.172)$$

Уравнения (3.171) и (3.172) описывают изменение двойной корреляции при изотропной турбулентности, причем уравнение (3.172) подобно уравнению Кармана — Хауэрта (3.36) для двойной корреляции скорости.

Если уравнение (3.172) рассматривать в то же время как соотношение, описывающее распространение некоторой субстанции в пространстве, то можно заметить, что оно существенно отличается от соответствующего уравнения для корреляции скорости. Согласно уравнениям (3.171) и (3.172) речь идет о распространении в трехмерном пространстве, тогда как уравнение (3.36) описывает распространение в пространстве с пятью измерениями. В этом отношении наблюдается значительно большее сходство с уравнением (3.35) для распространения величины $Q_{i,i}(r, t)$, которая фактически тоже является скаляром. Подобно $S_{i,i}(r, t)$, член $S_{\gamma,\gamma}^*(r, t)$ можно интерпретировать как функцию переноса.

Представляет интерес отыскать предельную форму уравнения (3.172) при $r \rightarrow 0$.

Поскольку величина $k_\gamma(r, t)$ при малых значениях r пропорциональна r^3 , то из соотношения (3.170) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} S_{\gamma,\gamma}^*(r, t) = 0. \quad (3.173)$$

Кроме того,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial R_{\gamma,\gamma}(r, t)}{\partial r} \right] = -\frac{6}{\lambda_\gamma^2}.$$

Следовательно, при $r \rightarrow 0$ уравнение (3.172) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \gamma'^2 = -12 \frac{f}{\lambda_\gamma^2} \gamma'^2. \quad (3.174)$$

Этот результат полностью аналогичен формуле (3.140). Вырождение интенсивности пульсаций γ обусловливается в конечном счете только молекулярной диффузией. Из-за различия между численными постоянными здесь и в формуле (3.140), а также потому, что величины f и λ_γ вовсе не обязательно должны иметь такие же значения, как соответственно ν и λ_g , между скоростями вырождения величин γ'^2 и u'^2 имеется количественное расхождение.

Спектральное распределение скалярной субстанции. В турбулентном скалярном поле пульсирующую субстанцию можно рассматривать как результат наложения пульсаций, соответствующих различным значениям волнового числа в непрерывном диапазоне волновых чисел. Спектральный анализ пульсаций γ покажет впоследствии, каким образом отдельные составляющие распределены по этим волновым числам. Как и в случае пульсаций скорости

спектральные функции можно, по-видимому, определить как преобразования Фурье от корреляционных функций. В пространстве эти спектральные функции будут иметь трехмерный характер. Однако то, что обычно измеряется с помощью соответствующей измерительной аппаратуры, представляет собой всего лишь одномерное сечение этого спектра.

Поэтому рассмотрим сначала этот одномерный спектр $E_{\gamma_1}(k_1, t)$. Определим его так, чтобы

$$\int_0^{\infty} E_{\gamma_1}(k_1, t) dk = \gamma'^2, \quad (3.175)$$

где $E_{\gamma_1}(k_1, t)$ — преобразование Фурье от функции $Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t)$. Так как $Q_{\gamma, \gamma}(0, t) = \gamma'^2$, то соотношения, определяющие преобразование Фурье, запишутся в следующей форме:

$$Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\gamma_1}(k_1, t) \exp(ik_1 x_1) dk_1 \quad (3.176)$$

и

$$E_{\gamma_1}(k_1, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) \exp(-ik_1 x_1) dx_1. \quad (3.177)$$

Читатель легко может убедиться самостоятельно, что соотношение (3.175) вытекает из (3.176) при $x_1 = 0$.

Трехмерный вариант выражения (3.177) запишется в виде

$$\begin{aligned} E_{\gamma, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) &= \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{\gamma, \gamma}(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-ik_l x_l) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Однако поскольку величина $Q_{\gamma, \gamma}$ является скаляром, который зависит только от r и t , то вновь можно воспользоваться сферическими полярными координатами. Тогда получим

$$E_{\gamma, \gamma}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} r^2 \frac{\sin kr}{kr} Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr; \quad (3.179)$$

преобразование Фурье от этого выражения будет таково:

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin kr}{kr} E_{\gamma, \gamma}(k, t) dk. \quad (3.180)$$

Из этого соотношения следует, что

$$\gamma'^2 = 4\pi \int_0^\infty k^2 E_{\gamma, \gamma}(k, t) dk. \quad (3.181)$$

Тогда трехмерную спектральную функцию $E_\gamma(k, t)$ определим так, чтобы

$$E_\gamma(k, t) = 4\pi k^2 E_{\gamma, \gamma}(k, t). \quad (3.182)$$

По аналогии с (3.175) имеем

$$\int_0^\infty E_\gamma(k, t) dk = \gamma'^2. \quad (3.183)$$

Следовательно, из соотношения (3.179) вытекает, что

$$E_\gamma(k, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr \quad (3.184)$$

и

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} E_\gamma(k, t) dk. \quad (3.185)$$

Трехмерный спектр $E_\gamma(k, t)$ является четной функцией от k и при малых значениях k пропорционален k^2 . Это непосредственно следует из разложения (3.184) в ряд:

$$E_\gamma(k, t) = \frac{2}{\pi} \left[k^2 \int_0^\infty r^2 Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr - \frac{k^4}{3!} \int_0^\infty r^4 Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr + \dots \right].$$

Это выражение можно сравнить с подобным соотношением (3.61) для трехмерного энергетического спектра $E(k, t)$. Но в отличие от выражения для $E(k, t)$, в котором первый член в правой части обращается в нуль в силу выполнения для случая несжимаемой жидкости условия (3.65), здесь первый член отличен от нуля.

Посмотрим теперь, какая связь существует между одномерным и трехмерным γ -спектрами. Затем, зная эту связь, можно будет вычислить трехмерный спектр по измеренным значениям для одномерного спектра.

Эта связь легко определяется, если заметить, что выражение (3.184) практически не отличается от производной от (3.177)

по k . Таким образом,

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) \cos k_1 x_1 dx_1,$$

$$\frac{\partial E_{\gamma 1}(k_1, t)}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_1 x_1 \sin k_1 x_1 Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) dx_1.$$

Отсюда

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = -k_1 \frac{\partial E_{\gamma 1}(k_1, t)}{\partial k_1}, \quad (3.186)$$

или

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E_{\gamma}(k, t)}{k} dk, \quad (3.187)$$

так как постоянная интегрирования определяется условием

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} E_{\gamma 1}(k_1, t) = 0.$$

Формулы (3.186) и (3.187) показывают, что если трехмерный спектр $E_{\gamma}(k, t)$ в диапазоне $k_1 \leq k < \infty$ описывается степенным законом с отрицательным показателем степени, то тот же закон справедлив и для одномерного спектра $E_{\gamma 1}(k_1, t)$, и наоборот.

Интегральный масштаб Λ_{γ} , определяемый соотношением (3.157), и микромасштаб λ_{γ} , определяемый формулой (3.156), легко получаются из спектральных функций для γ :

$$\Lambda_{\gamma} = \frac{1}{\gamma'^2} \int_0^{\infty} Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma'^2} E_{\gamma 1}(0, t) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma'^2} \int_0^{\infty} \frac{E_{\gamma}(k, t)}{k} dk, \quad (3.188)$$

$$\frac{2}{\lambda_{\gamma}^2} = -\frac{1}{\gamma'^2} \left[\frac{\partial^2 Q_{\gamma, \gamma}}{\partial r^2} \right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2} \int_0^{\infty} k^2 E_{\gamma 1}(k, t) dk =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma'^2} \int_0^{\infty} k^2 E_{\gamma}(k, t) dk. \quad (3.189)$$

Динамическое уравнение для $E_{\gamma}(k, t)$. Это уравнение получается из динамического уравнения (3.171) для корреляции $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$ путем взятия от каждого члена соответствующего преобразования Фурье. С этой целью введем спектральную функцию $F_{\gamma, \gamma}(k, t)$ как

преобразование Фурье от $S_{\gamma, \gamma}^*(r, t)$:

$$S_{\gamma, \gamma}^*(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\gamma, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l x_l) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3.190)$$

и

$$F_{\gamma, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\gamma, \gamma}^*(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-ik_l x_l) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.191)$$

Так как $S_{\gamma, \gamma}^*$ зависит только от r и t , то выражение (3.191) тоже можно записать в сферических полярных координатах; тогда $F_{\gamma, \gamma}$ будет зависеть только от k и t . Таким образом,

$$F_{\gamma, \gamma}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} r^2 \frac{\sin kr}{kr} S_{\gamma, \gamma}^*(r, t) dr \quad (3.192)$$

и

$$S_{\gamma, \gamma}^*(r, t) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin kr}{kr} F_{\gamma, \gamma}(k, t) dk. \quad (3.193)$$

Подстановка соотношений (3.193) и (3.180) в уравнение (3.171) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\gamma, \gamma}(k, t) - 2F_{\gamma, \gamma}(k, t) = -2fk^2 E_{\gamma, \gamma}(k, t). \quad (3.194)$$

Теперь положим

$$F_{\gamma}(k, t) = 8\pi k^2 F_{\gamma, \gamma}(k, t). \quad (3.195)$$

Тогда на основании соотношения (3.182) уравнение (3.194) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\gamma}(k, t) - F_{\gamma}(k, t) = -2fk^2 E_{\gamma}(k, t). \quad (3.196)$$

Мы показали, что спектральные функции $E_{\gamma, \gamma}(k, t)$ и $E_{\gamma}(k, t)$ при малых значениях k пропорциональны соответственно k^0 и k^2 . А каков будет характер изменения спектральных функций «переноса» $F_{\gamma, \gamma}(k, t)$ и $F_{\gamma}(k, t)$ при малых значениях k ?

С этой целью рассмотрим преобразование Фурье $F_{\gamma l, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t)$ от $S_{\gamma l, \gamma}(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$S_{\gamma l, \gamma}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\gamma l, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(i^* k_l x_l) dk_1 dk_2 dk_3.$$

Тогда для $\mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(x_1, x_2, x_3, t)$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{S}_{\gamma i, \gamma} = \\ &= i^* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_i \mathbf{F}_{\gamma i, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l x_l) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Сравнение этого выражения с (3.190) показывает, что $\mathbf{F}_{\gamma, \gamma} = ik_i \mathbf{F}_{\gamma i, \gamma}$. Величина $\mathbf{F}_{\gamma i, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t)$ представляет собой тензор первого ранга, общее выражение которого имеет вид [см. (3.4)]

$$\mathbf{F}_{\gamma i, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) = \varphi(k^2, t) k_i.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{F}_{\gamma, \gamma}(k, t) = ik^2 \varphi(k^2, t). \quad (3.197)$$

Если функция $\mathbf{F}_{\gamma i, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t)$ при $k=0$ является аналитической, то разложение функции $\varphi(k^2, t)$ в ряд должно начинаться с члена k^{2n} , где $n \geq 0$. В этом случае ряд для $\mathbf{F}_{\gamma, \gamma}(k, t)$ начинается, по крайней мере, с члена k^2 , а ряд для $\mathbf{F}_{\gamma}(k, t)$ — с члена k^4 .

Разлагая (3.192) в ряд с учетом формулы (3.197), имеем

$$\mathbf{F}_{\gamma, \gamma}(k, t) = -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{k^2}{3!} \int_0^\infty r^4 \mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(r, t) dr - \frac{k^4}{5!} \int_0^\infty r^6 \mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(r, t) dr + \dots \right] \quad (3.198)$$

и

$$\int_0^\infty r^2 \mathbf{S}_{\gamma, \gamma}^*(r, t) dr = 0. \quad (3.199)$$

Эквивалентным результатом является соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \mathbf{k}_{\gamma}(r, t) = 0.$$

Из формулы (3.198) или (3.197) вытекает, что

$$\mathbf{F}_{\gamma, \gamma}(0, t) = 0.$$

Следствием этого соотношения является то, что, согласно (3.194),

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\gamma, \gamma}(k, t) = 0,$$

а отсюда, по (3.179),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty r^2 \mathbf{Q}_{\gamma, \gamma}(r, t) dr = 0 \quad (3.200)$$

или

$$I_{\gamma} = \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} r^2 Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr = \text{инвариант.} \quad (3.201)$$

Это выражение аналогично инварианту Лойцянского (3.39), но в данном случае при $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 k_{\gamma}(r, t) = 0$ существует точный инвариант.

Проинтегрировав по k динамическое уравнение (3.196) для $E_{\gamma}(k, t)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E_{\gamma}(k, t) dk - \int_0^k F_{\gamma}(k, t) dk = -2f \int_0^k k^2 E_{\gamma}(k, t) dk. \quad (3.202)$$

Из соотношений (3.195) и (3.193) следует, что

$$\int_0^{\infty} F_{\gamma}(k, t) dk = 8\pi \int_0^{\infty} k^2 F_{\gamma, \gamma}(k, t) dk = 2S_{\gamma, \gamma}^*(0, t).$$

Это выражение, согласно формуле (3.173), обращается в нуль. Отсюда при $k = \infty$ уравнение (3.202) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} E_{\gamma}(k, t) dk = -2f \int_0^{\infty} k^2 E_{\gamma}(k, t) dk,$$

откуда на основании формул (3.182) и (3.189) получаем

$$\frac{d}{dt} \gamma'^2 = -12f \frac{\gamma'^2}{\lambda_{\gamma}^2}.$$

Это соотношение в точности соответствует уравнению (3.174). Если преобразование турбулентных пульсаций в молекулярное распределение γ (когда дальнейшее распределение происходит только под действием молекулярной диффузии) рассматривать как «диссипацию» пульсации γ , то производная $d\gamma'^2/dt$ как раз представляет собой эту «диссипацию» γ . Обозначим скорость этой «диссипации» γ через величину ϵ_{γ} , т. е.

$$\frac{d}{dt} \gamma'^2 = -\epsilon_{\gamma} = -12f \frac{\gamma'^2}{\lambda_{\gamma}^2}. \quad (3.203)$$

Решение динамического уравнения (3.202) или его дифференциального эквивалента (3.196) для $E_{\gamma}(k, t)$ может быть получено только в том случае, если принять какой-либо постулат относительно формы функции переноса $F_{\gamma}(k, t)$. Поскольку функция $F(k, t)$, как и $F_{\gamma}(k, t)$, описывает перенос какой-либо субстанции благодаря

взаимодействию вихрей, то логично предположить существование прямой пропорциональности между этими двумя функциями. Следовательно, в отношении функции $F_\gamma(k, t)$ можно воспользоваться постулатами, аналогичными тем предположениям, которые были сделаны относительно $F(k, t)$. При очень малых значениях числа Рейнольдса турбулентности взаимодействие вихрей оказывается весьма слабым и функцию переноса $F(k, t)$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с вязкой диссипацией. Аналогично в нашем случае пренебрежимо малой можно считать величину $F_\gamma(k, t)$, так как функция $F_\gamma(k, t)$ тоже определяется взаимодействием вихрей. Числу Рейнольдса $u'\lambda_g/\nu$ соответствует безразмерный комплекс $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$, который в динамических уравнениях для $E_\gamma(k, t)$ и $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$ играет ту же роль, что и число Рейнольдса $u'\lambda_g/\nu$ в динамических уравнениях для $E(k, t)$ и $Q_{i, i}(r, t)$.

Физический смысл безразмерного комплекса $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$ можно интерпретировать как отношение коэффициентов диффузии, обусловленной мелкими вихрями, и молекулярной диффузии.

Как будет показано ниже [см. формулу (3.229)], отношение λ_g/λ_γ определяется отношением $\nu/\mathfrak{f}$ и если ν и $\mathfrak{f}$ — одинаковые по порядку величины, то таковыми должны быть также

$$\frac{u'\lambda_g}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{u'\lambda_\gamma}{\mathfrak{f}}.$$

Если в уравнении (3.196) пренебречь членом $F_\gamma(k, t)$, то получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(k, t) = -2\mathfrak{f}k^2 E_\gamma(k, t), \quad (3.204)$$

решение которого записывается так:

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma(k, t_0) \exp[-2\mathfrak{f}k^2(t - t_0)]. \quad (3.205)$$

В связи с тем, что $E_\gamma(k, t) \sim k^2$ при $k \rightarrow 0$, величина $E_\gamma(k, t_0)$ должна равняться постоянной, умноженной на k^2 .

Этот результат можно также получить путем анализа решения для двойной корреляции $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$, если в уравнении (3.171) пренебречь членом $S_{\gamma, \gamma}^*(r, t)$. Это решение идентично с (3.42) и записывается следующим образом:

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = \frac{\sqrt{8\mathfrak{f}}}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{8\mathfrak{f}t}\right) \sum_1^\infty \frac{A_p}{t^p} H_{2p-1}\left(\frac{r}{\sqrt{8\mathfrak{f}t}}\right). \quad (3.206)$$

Если теперь в отношении каждого члена выражения (3.206) воспользоваться условием инвариантности (3.201):

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{\gamma, \gamma}(r, t) dr = \text{const},$$

то окажется, что при конечном значении этой постоянной указанному условию удовлетворяет только член $p = 1$; все остальные члены дают нулевые слагаемые. Если дальше рассматривать только член, соответствующий $p = 1$, то решение (3.206) упрощается:

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = 2A_1 \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right). \quad (3.207)$$

Кроме того, $Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = \gamma'^2 R_{\gamma, \gamma}(r, t)$, где γ'^2 зависит только от времени. Следовательно, из формулы (3.207) вытекает, что

$$R_{\gamma, \gamma}(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right) \quad (3.208)$$

и

$$\frac{\gamma'^2}{\gamma_0'^2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3/2}. \quad (3.209)$$

При этом следует обратить внимание на отличие этой скорости вырождения от скорости вырождения величины u'^2 , определяемой соотношением (3.43).

Из формул (3.156) и (3.208) следует, что

$$\lambda_{\gamma}^2 = 8ft,$$

а на основании формул (3.157) и (3.208) имеем

$$\Lambda_{\gamma}^2 = 2\pi ft.$$

Сравнение этих результатов с соответствующими выражениями для λ_f и Λ_f , приведенными в § 3.4, показывает, что

$$\frac{\lambda_{\gamma}}{\lambda_f} = \frac{\Lambda_{\gamma}}{\Lambda_f} = \sqrt{\frac{f}{v}}.$$

С помощью формулы (3.207) для $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$ и уравнения (3.184) можно получить выражение для $E_{\gamma}(k, t)$:

$$\begin{aligned} E_{\gamma}(k, t) &= \frac{4A_1}{\pi} \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} kr \sin kr \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right) dr = \\ &= \frac{A_1}{\sqrt{\pi}} (8f)^{3/2} k^2 \exp(-2fk^2t) = \text{const } k^2 \exp(-2fk^2t). \end{aligned} \quad (3.210)$$

Все эти выкладки относятся к малым значениям Re_λ и $u'\lambda_g/f$. При больших значениях Re_λ и $u'\lambda_g/f$, когда функциями переноса $F(k, t)$ и $F_\gamma(k, t)$ в соответствующих динамических уравнениях пренебрегать больше нельзя, в отношении этих функций требуется принять некоторые постулаты. Выше уже говорилось о том, что для обеих функций переноса представляется целесообразным принять одинаковые постулаты, ибо эти функции определяются одинаковым механизмом турбулентности.

В дальнейшем рассмотрим только тот случай, для которого применимо предположение Гейзенберга (3.121) относительно $F(k, t)$. Для функции переноса $F_\gamma(k, t)$ примем, что

$$\int_0^k F_\gamma(k, t) dk = -2\epsilon_\gamma(k, t) \int_0^k k^2 E_\gamma(k, t) dk, \quad (3.211)$$

где $\epsilon_\gamma(k, t)$ — коэффициент турбулентной диффузии, обусловленной вихрями с волновыми числами, лежащими в диапазоне от k до ∞ ; согласно предположению Гейзенберга относительно $F(k, t)$, по аналогии можем записать

$$\epsilon_\gamma(k, t) = \beta \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk. \quad (3.212)$$

Естественно, что и здесь против этого предположения можно высказать возражение, подобно тому как это было сделано в § 3.5 в отношении коэффициента турбулентной вязкости.

Преобразуем уравнение (3.202), воспользовавшись для этого соотношениями (3.211) и (3.212):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E_\gamma(k, t) dk = \\ = -2 \left[f + \beta \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \right] \int_0^k k^2 E_\gamma(k, t) dk. \end{aligned} \quad (3.213)$$

Будем считать теперь число Рейнольдса Re_λ настолько большим, что в спектре энергии турбулентности существует область равновесия. Если f такого же порядка, что и ν , то комплекс $u'\lambda_g/f$ тоже будет иметь очень большую величину. Для волновых чисел, лежащих в этой области равновесия, можно, кроме того, положить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_k^\infty E_\gamma(k, t) dk \ll \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E_\gamma(k, t) dk$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E_{\gamma}(k, t) dk \approx \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} E_{\gamma}(k, t) dk = -\varepsilon_{\gamma}.$$

Тогда вместо уравнения (3.213) можно записать

$$2 \left[f + \beta \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \right] \int_0^k k^2 E_{\gamma}(k, t) dk = \varepsilon_{\gamma}. \quad (3.214)$$

Решение этого уравнения получается без труда и имеет вид

$$E_{\gamma}(k, t) = \frac{\beta \varepsilon_{\gamma} \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}}{2k^2 \left[f + \beta \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}} dk \right]^2}. \quad (3.215)$$

Пользуясь этим решением, можно найти величину $E_{\gamma}(k, t)$, если известна величина $E(k, t)$.

Выше мы получили простые степенные зависимости для $E(k, t)$ в области равновесия, а именно: закон « $-5/3$ » Колмогорова для инерционной подобласти и закон « -7 » для области наибольших волновых чисел, в которой наблюдается сильное влияние вязкости и связанная с ней интенсивная диссипация.

Если рассматривается инерционная подобласть, где

$$E(k, t) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha} \right)^{2/3} k^{-5/3}$$

и $\varepsilon \gg \nu$, то должно выполняться также условие $\varepsilon_{\gamma} \gg f$. Следовательно, если в выражении (3.215) пренебречь f по сравнению с ε_{γ} , то решение для $E_{\gamma}(k, t)$ в этой инерционной подобласти турбулентности будет иметь вид

$$E_{\gamma}(k, t) = \left(\frac{8}{9} \right)^{2/3} \frac{\alpha^{1/3}}{\beta} \varepsilon_{\gamma}(t) [\varepsilon(t)]^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (3.216)$$

Это точно такой же закон, который был получен и для функции энергетического спектра.

Как показал Корсин [34], к такому же результату приводит и анализ размерностей, если принять, что в рассматриваемой области больших волновых чисел спектр $E_{\gamma}(k, t)$ зависит только от диссипации энергии $\varepsilon(t)$, а также от диссипации $\varepsilon_{\gamma}(t)$ в этой области.

Для области наиболее высоких «вязких» волновых чисел можно теперь воспользоваться предположением о том, что не только

$\nu \gg \epsilon(k, t)$, но и $f \gg \epsilon_\gamma(k, t)$. Полагая в (3.215), что $E(k, t) = C(t) k^{-7}$, и пренебрегая величиной $\epsilon_\gamma(k, t)$, получаем

$$E_\gamma(k, t) = \frac{\beta \epsilon_\gamma(t)}{2f^2} \sqrt{C(t)} k^{-7}.$$

Это опять-таки полностью совпадает с законом, найденным для $E(k, t)$. Но при этом следует сразу же отметить, что, вследствие неприменимости по указанным выше причинам гипотезы Гейзенберга к вязкой области, полученный только что для $E_\gamma(k, t)$ результат нельзя распространить на эту область.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что f и ν — одинаковые по порядку величины. Можно ожидать, что изменение $E_\gamma(k, t)$ при больших волновых числах будет зависеть главным образом от отношения f/ν . Так, в случае $f/\nu \ll 1$ влияние молекулярной диффузии становится заметным только при волновых числах, значительно превышающих $k_d = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, тогда как в случае $f/\nu \gg 1$ это влияние проявляется уже при $k \ll k_d$. Для удобства можно ввести такое волновое число, которое отделяет область, где молекулярная диффузия пренебрежимо мала, от области, где она играет важную роль. По аналогии с величиной k_d определим это волновое число как $k_{\gamma, d} = (\epsilon/f^3)^{1/4}$.

Если $f/\nu \ll 1$, то существует диапазон волновых чисел $k_d < k < k_{\gamma, d}$, в котором турбулентное движение происходит в вязкой области, а влияние молекулярной диффузии все еще пренебрежимо мало. В этом диапазоне вязких движений основная доля в конвективном переносе субстанции γ принадлежит, по всей вероятности, деформации жидких элементов. Рассмотрим достаточно малый жидкий элемент, размер которого меньше, чем $1/k_d$. Как будет показано в § 5.4, благодаря указанной деформации такого жидкого элемента в длинную и тонкую ленту, изменения величины γ происходят в основном в направлении главной оси наименьшей скорости деформации, градиенты γ становятся более крутыми, а влияние молекулярной диффузии возрастает. Бэтчелор [58] показал, что конвекция, вызванная деформирующим воздействием, и молекулярная диффузия становятся одинаковыми по порядку величины при $k_{\gamma, c} = (\epsilon/\nu f^2)^{1/4}$. В диапазоне $k_d < k < k_{\gamma, c}$ доминирующая роль принадлежит конвекции и процесс деформации преобразует фурье-компоненты малых волновых чисел в компоненты более высоких волновых чисел. Далее, Бэтчелор получил следующее выражение для стационарного спектра γ -пульсаций:

$$E_\gamma(k) = A \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{\epsilon_\gamma}{k} \exp \left(-A \frac{k^2}{k_{\gamma, c}^2} \right),$$

где A — численная постоянная порядка 1. При $k \ll k_{\gamma, c}$ это соотношение упрощается:

$$E_{\gamma}(k) \approx A \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{\epsilon_{\gamma}}{k}. \quad (3.217a)$$

Эта формула показывает, что в этом диапазоне волновых чисел функция $E_{\gamma}(k)$ убывает менее быстро, чем $E(k)$. Однако при $k > k_{\gamma, c}$ и особенно при $k > k_{\gamma, d}$ важную роль начинает играть молекулярная диффузия, и тогда функция $E_{\gamma}(k)$ с возрастанием k будет убывать очень быстро.

В другой работе Бэтчелор, Хауэлс и Таунсенд [59] рассмотрели случай большого коэффициента молекулярной диффузии, $f/\nu \gg 1$, в следующем диапазоне волновых чисел:

$$k_{\gamma, d} < k < k_d.$$

Если число Рейнольдса Re_{λ} достаточно велико, то для энергетического спектра $E(k)$ в инерционной подобласти справедлив закон Колмогорова (3.118). При $k < k_{\gamma, d}$ спектр $E_{\gamma}(k)$ также подчиняется подобному закону (3.216).

В инерционной подобласти величина $E(k)$ с ростом k изменяется относительно медленно, в то время как спектр $E_{\gamma}(k)$ благодаря влиянию молекулярной диффузии затухает, по-видимому, значительно быстрее. Исходя из уравнения баланса между переносом под действием турбулентной конвекции и молекулярной диффузии и используя гипотезу о том, что фурье-компонента k спектра субстанции γ определяется, в основном, фурье-компонентой того же порядка в спектре турбулентной скорости, Бэтчелор, Хауэлс и Таунсенд получили следующее соотношение между $E_{\gamma}(k)$ и $E(k)$:

$$f^2 k^4 E_{\gamma}(k) = \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{\gamma}}{f} E(k),$$

откуда в случае закона Колмогорова (3.118) для $E(k)$ имеем

$$E_{\gamma}(k) = \text{const } \epsilon_{\gamma} \epsilon^{2/3} f^{-3} k^{-17/3}. \quad (3.217b)$$

При волновых числах выше $k = k_d$ спектр $E_{\gamma}(k)$ с увеличением k снова будет очень быстро затухать.

Формулы (3.216) и (3.217) дают выражения для спектральной функции $E_{\gamma}(k, t)$, справедливые соответственно в инерционной подобласти больших волновых чисел и в области наивысших волновых чисел. На нижнем пределе этого диапазона волновых чисел величина $E_{\gamma}(k, t)$ пропорциональна k^2 . Для области энергосодержащих вихрей, в которой лежит максимум энергетического спектра и, стало быть, логично ожидать максимума спектральной функции $E_{\gamma}(k, t)$, решение до сих пор еще не получено. Но точно так же, как это

сделал Карман в отношении энергетического спектра $E(k, t)$, можно предложить интерполяционную формулу для $E_\gamma(k, t)$, перекрывающую диапазон от $k=0$ до инерционной подобласти, а именно:

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma[k_0(t)] 2^{11/6} \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]^{11/6}}. \quad (3.218)$$

При малых значениях k/k_0 эта формула приводит к соотношению

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma(k_0) 2^{11/6} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 = I_\gamma k^2,$$

откуда следует, что $E_\gamma(k_0) 2^{11/6} = I_\gamma k_0^2$. С другой стороны, для очень больших значений k/k_0 эта формула дает закон « $-5/3$ ».

Используя (3.187), можно вычислить одномерный спектр $E_{\gamma 1}(k_1, t)$:

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \frac{3}{5} 2^{11/6} E_\gamma(k_0) \left[1 + \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2\right]^{-5/6}. \quad (3.219)$$

Функция $E_\gamma(k_0)$, которая, как было показано, соответствует также и $I_\gamma k_0^2$, может быть определена из условия, что корреляционная функция $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$ при $r=0$ становится равной γ'^2 .

Согласно соотношению (3.176), с помощью формулы (3.219) получаем

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = \frac{3}{5} 2^{11/6} \frac{V \sqrt{\pi} k_0}{2^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} E_\gamma(k_0) (k_0 r)^{1/3} K_{1/3}(k_0 r),$$

и, таким образом, условие $Q_{\gamma, \gamma}(0, t) = \gamma'^2$ дает

$$E_\gamma(k_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\frac{3}{5} 2^{5/6} V \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \gamma'^2.$$

При таком выражении для $E_\gamma(k_0)$ для $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$, $E_\gamma(k, t)$ и $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ получаются соответственно следующие формулы:

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = \gamma'^2 \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_0 r)^{1/3} K_{1/3}(k_0 r), \quad (3.220)$$

$$E_\gamma(k, t) = \gamma'^2 \frac{10}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{V \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]^{11/6}} \quad (3.221)$$

и

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \gamma'^2 \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \left[1 + \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2\right]^{-5/6}. \quad (3.222)$$

Интегральный масштаб Λ_γ , определяемый по величине $E_{\gamma 1}(0, t)$, на основании соотношений (3.187) и (3.188) запишется так:

$$\Lambda_\gamma(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma'^2} E_{\gamma 1}(0, t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \approx \frac{0,75}{k_0}. \quad (3.223)$$

Сравнение с формулой, полученной для Λ_f [см. (3.138)], показывает, что эти величины, выраженные соответственно через k_0 и k_e , совершенно одинаковы. Точно так же, как k_e оказалось возможным выразить через u' и ϵ , величину k_0 можно выразить через γ' и ϵ_γ . Из соотношений (3.216) и (3.221) для больших значений k/k_0 получаем

$$k_0(t) = \frac{8}{9} \left[\frac{3}{10} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \right]^{3/2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3} \frac{\epsilon_\gamma^{3/2}}{\epsilon^{1/2} \gamma'^3}}.$$

Между прочим, можно заметить, что выражения для $Q_{\gamma, \gamma}(r, t)$ и $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ идентичны выражениям для $f(r, t)$ и $E_1(k_1, t)$.

Вырождение изотропного скалярного поля. Изотропное скалярное поле, присущее изотропно-турбулентному полю скорости или наложенное на него, будет вырождаться вместе с этим полем скорости. Конечно, вполне возможно представить себе изотропное скалярное поле, наложенное на невырождающееся изотропно-турбулентное поле скорости, хотя последнее вряд ли может существовать, пока не будут обеспечены такие условия, при которых энергия, необходимая для поддержания турбулентности, сможет подводиться так, чтобы эта изотропность не нарушалась. Правда, для изучения некоторых основных свойств процесса перемешивания предположение о существовании такого гипотетического случая, видимо, может оказаться весьма полезным. Однако здесь мы пока не будем принимать этого предположения, а сначала рассмотрим оба этих изотропных поля при условии, что они вырождаются одновременно.

Мы уже имели дело с вырождением скалярного поля, в котором как $u'\lambda_\gamma/f$, так и Re_λ были настолько малы, что конвективные члены в динамических уравнениях (3.209) и (3.210) исчезали. В процессе вырождения спектральная функция, так же как и корреляционная

функция, полностью автомодельна, если соответственно k и r выражены через длину $\sqrt{ft}$.

Однако нам известно, что если число Рейнольдса Re_λ уже не очень мало, то в вырождающемся турбулентном поле скорости полная автомодельность функции энергетического спектра или функции корреляции скоростей невозможна.

Здесь может возникнуть вопрос, к каким последствиям приведет предположение о полной автомодельности спектральной и корреляционной функций в процессе вырождения скалярного поля в том случае, когда комплекс $u'\lambda_\gamma/f$ не является уже малой величиной. При «вязком» вырождении характерной длиной служила величина $\sqrt{ft}$; но вместо нее могла бы быть выбрана любая другая длина, пропорциональная $\sqrt{ft}$, например λ_γ или Λ_γ . Если считать, что полная автомодельность возможна даже при больших значениях $u'\lambda_\gamma/f$, то следует пользоваться теми же характерными длинами.

Выберем в качестве характерной длины величину λ_γ и рассмотрим динамическое уравнение (3.172). В случае полной автомодельности функция $R_{\gamma,\gamma}(r, t)$ должна зависеть только от $\psi = r/\lambda_\gamma$, где λ_γ — функция от t (а именно $\lambda_\gamma \sim \sqrt{ft}$). Если считать ψ независимой переменной, то уравнение (3.172) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\gamma,\gamma} \frac{d\gamma'^2}{dt} - \gamma'^2 \frac{1}{\lambda_\gamma} \frac{d\lambda_\gamma}{dt} \psi \frac{dR_{\gamma,\gamma}}{d\psi} - 2 \frac{\gamma'^2 u'}{\lambda_\gamma} \frac{1}{\psi^2} \frac{d}{d\psi} (\psi^2 k_\gamma) = \\ = 2f \frac{\gamma'^2}{\lambda_\gamma^2} \frac{1}{\psi} \frac{d}{d\psi} \left(\psi^2 \frac{dR_{\gamma,\gamma}}{d\psi} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением (3.174), после некоторых преобразований получаем

$$12R_{\gamma,\gamma} + \frac{\lambda_\gamma}{f} \frac{d\lambda_\gamma}{dt} \psi \frac{dR_{\gamma,\gamma}}{d\psi} + 2 \frac{u'\lambda_\gamma}{f} \frac{1}{\psi^2} \frac{d}{d\psi} (\psi^2 k_\gamma) + \frac{2}{\psi^2} \frac{d}{d\psi} \left(\psi^2 \frac{dR_{\gamma,\gamma}}{d\psi} \right) = 0.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\frac{\lambda_\gamma}{f} \frac{d\lambda_\gamma}{dt} = \text{const}, \quad (3.224)$$

$$\frac{u'\lambda_\gamma}{f} = \text{const}. \quad (3.225)$$

Первый из этих результатов, (3.224), находится в соответствии с тем фактом, что $\lambda_\gamma \sim \sqrt{ft}$. Второе соотношение, (3.225), показывает, что величина λ_γ должна изменяться обратно пропорционально величине u' .

Если $u'^2 = Ct^{-n}$, то из (3.225) следует, что величина λ_γ изменяется согласно зависимости

$$\lambda_\gamma^2 = \text{const } t^n. \quad (3.226)$$

Но ввиду того, что $\lambda_\gamma^2 \sim ft$, показатель степени n должен быть равен единице. Отсюда следует, что существование полной автомодельности спектральной и корреляционной функций в скалярном поле при больших значениях $u'\lambda_\gamma/f$ возможно лишь в том случае, когда турбулентное поле скорости вырождается по «линейному» закону, т. е. в начальной стадии вырождения.

Постоянная в формуле (3.226) может быть определена из соотношения (3.174) следующим образом. Предположим, что

$$\gamma'^2 = Ct^{-m}. \quad (3.227)$$

Тогда соотношение (3.174) дает

$$\lambda_\gamma^2 = \frac{12f}{m} t. \quad (3.228)$$

Сравнение этого выражения с соответствующей формулой (3.146) для λ_g^2 показывает, что

$$\frac{\lambda_g^2}{\lambda_\gamma^2} = \frac{5}{6} \frac{m}{n} \frac{\nu}{f}. \quad (3.229)$$

Это — общее соотношение между λ_g и λ_γ , на которое мы ссылались выше.

Величину m в (3.227) можно вычислить, воспользовавшись инвариантным соотношением (3.201). Вследствие полной автомодельности $R_{\gamma, \gamma}(r, t)$ в процессе вырождения, получаем

$$\frac{2}{\pi} \gamma'^2 \lambda_\gamma^3 \int_0^\infty \psi^2 R_{\gamma, \gamma}(\psi) d\psi = I_\gamma,$$

на основании чего можно заключить, что

$$\gamma'^2 \lambda_\gamma^3 = \text{const}. \quad (3.230)$$

Тогда, подставляя сюда вместо γ'^2 выражение (3.227) и заменяя λ_γ по (3.228), убеждаемся, что условие (3.230) выполняется только в том случае, когда $m = 3/2$.

Отсюда вытекает, что полная автомодельность функций $R_{\gamma, \gamma}(r, t)$ и $E_\gamma(k, t)$ в процессе вырождения в случае, когда Re_λ и $u'\lambda_\gamma/f$ велики, возможна лишь в начальной стадии вырождения поля скорости;

при этом

$$\gamma'^2 = \text{const} (t - t_0)^{-3/2} \quad (3.231)$$

и

$$\lambda_\gamma^2 = 8f(t - t_0). \quad (3.232)$$

Эти законы вырождения точно совпадают с соотношениями для «вязкой» области, которая должна соответствовать конечной стадии вырождения поля скорости.

Возможно, что в переходной стадии вырождения, когда интенсивность u'^2 затухает по степенному закону с показателем степени, изменяющимся от -1 до $-5/2$, закон вырождения величины γ'^2 отличается от степенной зависимости с показателем $-3/2$, имеющей место как в начальной, так и в конечной стадии, хотя это и не представляется весьма очевидным. Однако, независимо от характера затухания γ'^2 в переходной стадии, величина λ_γ^2 всегда должна быть пропорциональна ft ; следовательно, комплекс $u'\lambda_\gamma/f$ не может сохранять постоянного значения. Стало быть, полная автомодельность функций $R_{\gamma, \gamma}(r, t)$ и $E_\gamma(k, t)$ в переходной стадии вырождения невозможна.

Некоторые экспериментальные данные. Как уже упоминалось в начале этого параграфа, единственными опубликованными результатами измерений в турбулентном скалярном поле являются данные Кистлера, О'Брайена и Корсина [35] о пульсациях температуры. Эти измерения, которые носят предварительный характер, производились в потоке за решеткой из деревянных стержней с квадратными ячейками ($M = 1$ дюйм, $d = 1/4$ дюйма). Турбулентное поле температуры генерировалось с помощью сетки из нагретых нихромовых проволочек, помещенной на расстоянии 1,5 дюйма вверх по потоку от деревянной решетки, причем проволочки располагались в ряд с деревянными стержнями.

При этом проводились измерения, касающиеся вырождения пульсаций скорости и температуры, продольных и поперечных корреляций скорости и температуры и одномерных спектров пульсаций скорости и температуры. Пульсации измерялись с помощью термоанемометра, который при измерении температуры работал в режиме термометра сопротивления. Спектр пульсаций температуры определялся путем подбора такой температуры нити, при которой ее характеристики по скорости и по температуре имели одинаковый порядок («смешанная» чувствительность). Температурный спектр получался посредством вычитания скоростного спектра, определенного при холодной проволочной сетке, из смешанного спектра. Этот способ правомерен при условии, что все гармоники этих двух спектров не коррелированы друг с другом и, стало быть, происходит суперпозиция этих спектров.

Все измерения производились при средней скорости 420 см/сек, которой соответствует число Рейнольдса, отнесенное к размеру ячейки решетки, равное приблизительно $Re_M = 7000$. В опытах были охвачены расстояния вплоть до $100M$ вниз по потоку от решетки.

Вкратце, результаты этого исследования таковы.

Продольная и поперечная корреляции температуры оказываются одинаковыми, как этого и следовало ожидать, исходя из условия изотропности.

Продольные корреляции скорости и температуры весьма близки друг к другу.

Одномерные спектры $E_1(k_1, t)$ и $E_{\gamma_1}(k_1, t)$ оказались фактически одинаковыми. Однако ни в одном из них не удалось обнаружить более или менее существенного диапазона, для которого был бы справедлив закон « $-5/3$ »; этого результата можно было ожидать вследствие довольно низких значений числа Рейнольдса, отнесенного к размеру ячейки решетки.

Сравнения законов вырождения пульсаций u' и γ' с теоретическими зависимостями ввиду недостаточности данных не производилось. Однако по данным о вырождении на основании соотношений (3.140) и (3.174) были определены величины λ_γ и λ_g . Их отношение λ_γ/λ_g в интервале $20 < x_1/M < 110$ оказалось больше единицы и, слабо возрастая в этом диапазоне, достигало значения 1,6. Кроме того, по имеющимся данным авторы нашли величину $(d\gamma'/du')(u'/\gamma')$, которая, согласно соотношениям (3.140) и (3.174), должна выражаться формулой

$$\frac{d\gamma'}{du'} \frac{u'}{\gamma'} = \frac{6}{5} \frac{\lambda_g^2}{\lambda_\gamma^2}$$

или, с учетом (3.146) и (3.228),

$$\frac{d\gamma'}{du'} \frac{u'}{\gamma'} = \frac{m}{n}.$$

Значения, вычисленные по экспериментальным данным о вырождении, при возрастании x_1/M уменьшаются по сравнению с единицей (при $x_1/M = 20$), приближаясь при больших x_1/M к значению 0,6.

Ни величина $\lambda_\gamma/\lambda_g \approx 1,6$, ни величина $m/n = 0,6$, полученные для больших значений x_1/M (вплоть до $x_1/M = 110$), не согласуются с законами вырождения (3.151) и (3.231) для начальной стадии. Эти величины должны были бы получиться для конечной стадии вырождения, к которой, однако, результаты описанных измерений не относятся. Возможно, что начальной стадии в этих опытах практически и не существовало, а турбулентность уже находилась в переходной стадии или близко к ней. Для проверки теорий, изложенных в этом параграфе, следует, по-видимому, ожидать новых экспериментальных данных.

§ 3.8. Пульсации давления при изотропной турбулентности

Для многих физических явлений важное значение имеют не только пульсации скорости и их корреляции, но также и пульсации статического давления. Так, например, генерирование шума под воздействием турбулентности непосредственно связано с распределением пульсаций давления. Кроме того, наблюдается влияние пульсирующих градиентов давления вблизи твердой стенки на развитие пограничного слоя. Дробление диспергированной фазы при перемешивании несмешивающихся жидкостей, вызванное турбулентностью в непрерывной фазе, — еще один пример влияния распределения пульсаций давления.

Первый вклад в изучение корреляций между пульсирующим давлением в двух соседних точках был сделан Гейзенбергом [15],

Обуховым [36] и Бэтчелором [37]. Позднее Лимбером [38] были опубликованы некоторые численные результаты для корреляций давление — скорость, а Юбером [39, 40] — более подробные теоретические и экспериментальные данные о квадрупольных корреляциях скорости, связанных с корреляциями пульсирующего давления. Все эти авторы исходили из предположения об однородной турбулентности.

Рассмотрим кратко свойства двойной корреляции между пульсациями давления в двух соседних точках.

Эту двойную корреляцию $(Q_{p,p})_{A,B} = (1/\rho^2) \overline{p_A p_B}$, как непосредственно следует из уравнений движения, можно выразить через корреляцию скорости. В случае несжимаемой жидкости уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} u_i.$$

Взяв от обеих частей этого уравнения дивергенцию, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_l \partial x_l} = - \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_l \partial x_j}.$$

Перемножая почленно два таких уравнения, записанных отдельно для точек A и B , имеем

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_l \partial x_l} \right)_B = \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_l \partial x_j} \right)_A \left(\frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} \right)_B.$$

Введем $\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A$; тогда вследствие предположения об однородной турбулентности

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 \overline{p_A p_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} = \frac{\partial^4 \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l}.$$

При однородной изотропной турбулентности двойная корреляция $\overline{p_A p_B}$ зависит только от $r^2 = \xi_i \xi_i$. Введем, далее, обозначение

$$\frac{\partial^4 \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} = M. \quad (3.233)$$

Тогда на основании соотношения

$$\frac{\partial^4 Q_{p,p}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 Q_{p,p} = \frac{1}{r} \frac{\partial^4 r Q_{p,p}}{\partial r^4}$$

получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^4 r Q_{p,p}}{\partial r^4} = M(r, t). \quad (3.234)$$

Предположим, что функция $Q_{p,p}(r, t)$ при бесконечном возрастании r быстро стремится к нулю и, стало быть, для произвольного значения n

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dr^n} [r Q_{p,p}(r, t)] = 0.$$

Тогда из выражения (3.234) следует, что

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3} [r Q_{p,p}(r, t)] = - \int_r^\infty r' M(r', t) dr'.$$

Последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r Q_{p,p}(r, t) \right] &= \int_r^\infty dr' \int_{r'}^\infty r'' M(r'', t) dr'' = \\ &= \left[r' \int_{r'}^\infty r'' M(r'', t) dr'' \right]_r^\infty + \int_r^\infty r'^2 M(r', t) dr' = \\ &= \int_r^\infty r' (r' - r) M(r', t) dr', \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[r Q_{p,p}(r, t) \right] &= - \frac{1}{2} \int_r^\infty r' (r' - r)^2 M(r', t) dr' \end{aligned}$$

и, наконец,

$$Q_{p,p}(r, t) = \frac{1}{3!r} \int_r^\infty r' (r' - r)^3 M(r', t) dr'. \quad (3.235)$$

Следовательно, зная $M(r, t)$, двойную корреляцию $Q_{p,p}(r, t)$ можно вычислить посредством однократного интегрирования.

Примем теперь следующее предположение относительно квадрупольной корреляции $\overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}$: распределение совместной вероятности этих турбулентных скоростей является нормальным. В этом случае выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B} &= \\ &= \overline{(u_i u_j)_A} \overline{(u_k u_l)_B} + \overline{(u_i)_A (u_k)_B} \overline{(u_j)_A (u_l)_B} + \overline{(u_i)_A (u_l)_B} \overline{(u_j)_A (u_k)_B} = \\ &= Q_{i,j}(0) Q_{k,l}(0) + Q_{i,k}(r) Q_{j,l}(r) + Q_{i,l}(r) Q_{j,k}(r). \end{aligned} \quad (3.236)$$

Экспериментальным подтверждением этого предположения могут, по-видимому, служить опыты Юбероя [39, 40], который одновременно измерял квадрупольную корреляцию скоростей и соответствующие двойные корреляции скорости.

Так как для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_{i,l} = 0$$

и т. д., то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} Q_{i,k} Q_{j,l} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} Q_{j,l} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_l} Q_{i,k}, \\ \frac{\partial^4}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} Q_{i,l} Q_{j,k} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_l} Q_{i,l} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} Q_{j,k}, \end{aligned}$$

откуда

$$M(r, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} Q_{j,l}(r, t) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_l} Q_{i,k}(r, t). \quad (3.237)$$

Теперь покажем, что двойные корреляции скорости $Q_{j,l}(r, t)$ могут быть выражены через $f(r, t)$. Если выражение (3.11) подставить в (3.237), то после длительных [37] преобразований (3.237) примет вид

$$\begin{aligned} M(r, t) &= \\ &= 4u'^4 \left[2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right) + \frac{10}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) + \frac{3}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.238)$$

Подставляя (3.238) в интеграл равенства (3.235), получаем

$$Q_{p,p}(r, t) = 2u'^4 \int_r^\infty \left(r' - \frac{r^2}{r'} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 dr'. \quad (3.239)$$

В частном случае $r = 0$ отсюда имеем

$$\overline{p^2} = \rho^2 Q_{p,p}(0, t) = 2\rho^2 u'^4 \int_0^\infty r' \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 dr'.$$

Далее, из (3.239) находим

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_3} \right)^2} = \lim_{B \rightarrow A} \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)_A \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)_B} = - \lim_{B \rightarrow A} \frac{\partial^2 \overline{p_A p_B}}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} = \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} \rho^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} Q_{p,p}(r, t) \right] = 4\rho^2 u'^4 \int_0^\infty \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 dr'. \end{aligned} \quad (3.240)$$

В некоторых случаях вместо выражения $Q_{p,p}(r, t) = (1/\rho^2) \overline{p_A p_B}$ представляет интерес рассматривать выражение $(1/\rho^2) \overline{(p_A - p_B)^2}$, которое связано с $Q_{p,p}(r, t)$ следующим образом:

$$\frac{1}{\rho^2} \overline{(p_A - p_B)^2} = 2 [Q_{p,p}(0, t) - Q_{p,p}(r, t)]. \quad (3.241)$$

Интегралы в формулах (3.239) и (3.240) берутся, если известна продольная корреляция $f(r, t)$. Вследствие того, что эта корреляция

зависит от числа Рейнольдса турбулентности, для корреляций давления в различных случаях получаются и различные выражения.

Рассмотрим вначале малые числа Рейнольдса. В этом случае выражение для $f(r, t)$ имеет вид [см. (3.45)]

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\sqrt{t}}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda_f^2}\right).$$

Подстановка в формулу (3.239) и последующее интегрирование дают

$$Q_{p,p}(r, t) := u'^4 \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda_f^2}\right),$$

или

$$\frac{Q_{p,p}(r, t)}{Q_{p,p}(0, t)} = \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda_f^2}\right).$$

Это выражение показывает, что двойная корреляция давления с увеличением r уменьшается быстрее, чем продольная корреляция скорости.

Для интенсивности пульсаций давления имеем

$$p' = \rho \sqrt{Q_{p,p}(0, t)} = \rho u'^2.$$

Обратимся теперь к области больших чисел Рейнольдса и рассмотрим прежде всего эмпирическое соотношение

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r}{\Lambda_f}\right),$$

которое приводит к следующей формуле для $Q_{p,p}(r, t)$:

$$Q_{p,p}(r, t) = 2u'^4 \left[\left(\frac{r}{2\Lambda_f} + \frac{1}{4} \right) \exp\left(-\frac{2r}{\Lambda_f}\right) - \frac{r^2}{\Lambda_f^2} Ei\left(-\frac{2r}{\Lambda_f}\right) \right],$$

где

$$Ei(-x) = -\int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{y} dy.$$

Отсюда

$$p' = \rho \sqrt{Q_{p,p}(0, t)} = \frac{\rho u'^2}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \rho u'^2.$$

Бэтчелор [37] произвел численную оценку интеграла (3.239), исходя из формы зависимости $f(r, t)$, соответствующей измерениям Праудмена [18] в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. Согласно этим данным, отношение $Q_{p,p}(r, t)/Q_{p,p}(0, t)$ с увеличением r тоже убывает быстрее, чем функция $f(r, t)$. Для интенсивности пульсаций давления Бэтчелор получил формулу

$$p' = \sqrt{0,34} \rho u'^2 = 0,58 \rho u'^2.$$

При больших числах Рейнольдса, соответствующих, например, инерционной подобласти энергетического спектра, для функции $f(r, t)$ выше было получено следующее выражение, справедливое при малых значениях r :

$$f(r, t) = 1 - \frac{A}{u'^2} (\varepsilon r)^{2/3}.$$

Для этих значений r можно по формуле (3.241) определить величину $\overline{(p_A - p_B)^2}$. Используя (3.239), получаем

$$\begin{aligned} \overline{(p_A - p_B)^2} &= 2\rho^2 [Q_{p,p}(0, t) - Q_{p,p}(r, t)] = \\ &= 4\rho^2 u'^4 \left[\int_0^r r' \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 dr' + r^2 \int_r^\infty \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right)^2 dr' \right]. \end{aligned}$$

Ввиду того, что основной вклад в подынтегральное выражение во втором интеграле приходится на долю величины $f(r, t)$ при малых r ,

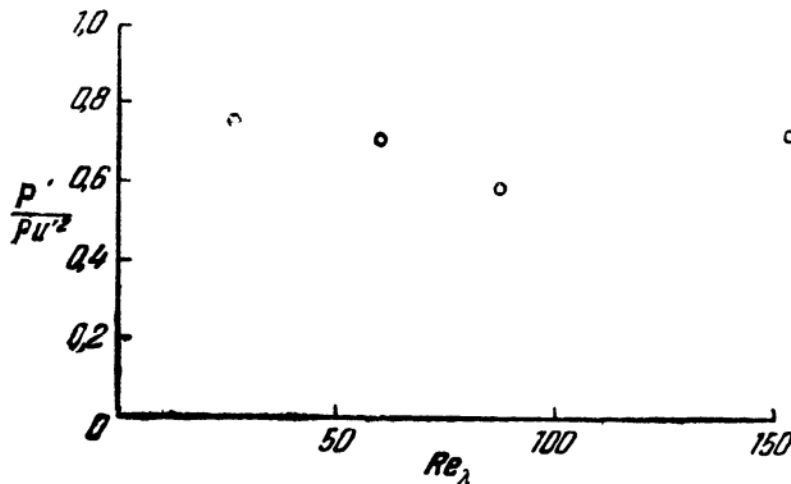


Рис. 3.21. Величина $p' / \rho u'^2$ при различных значениях Re_λ [40].

этот интеграл можно вычислить приближенно путем замены функции $f(r, t)$ приведенным выше выражением, которое является точным только для малых значений r . Результат подобного расчета записывается в виде

$$\overline{(p_A - p_B)^2} = 4\rho^2 u'^4 \frac{A^2}{u'^4} (\varepsilon r)^{4/3} = 4\rho^2 u'^4 [1 - f(r, t)]^2 = \rho^2 [\overline{(u_A - u_B)^2}]^2.$$

Юберой [39, 40] определил p' для различных чисел Рейнольдса. Его результаты, приведенные на рис. 3.21, указывают на то, что величина $p' / \rho u'^2$, по-видимому, лежит ближе к 0,7, нежели к 0,58.

§ 3.9. Замечания о влиянии сжимаемости

В гидродинамике обычно принято и допустимо пренебрегать влиянием сжимаемости, если число Маха $M \ll 1$. Это было показано в § 1.2. При анализе турбулентности можно ввести в рассмотрение среднеквадратичное число Маха $M = u'/c$, где c — скорость звука.

Однако в некоторых случаях, даже если $M = u'/c \ll 1$, влиянием сжимаемости пренебрегать нельзя. Это относится, например, к генерированию звука турбулентностью; применительно к этому явлению сжимаемость оказывается существенной особенностью жидкости. Следовательно, влияние сжимаемости жидкости на характерные свойства турбулентности может представлять интерес даже при малых значениях числа Маха.

В главе 1 было показано, что, если учитывать влияние сжимаемости, осредненное движение будет зависеть не только от турбулентных напряжений сдвига, но также и от напряжений, связанных с двойными и тройными корреляциями, в которые входит пульсация плотности $\tilde{\rho}$ [см. уравнение (1.16)].

В случае несжимаемой жидкости мы подробно изучили структуру изотропной турбулентности, основываясь на характерных свойствах двойной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$. Как показал Кшивоблоцкий [41, 42], соотношения, подобные формулам для несжимаемой жидкости, оказывается возможным найти также и в рассматриваемом случае для различных корреляций второго, третьего и более высоких порядков: $\overline{(\rho u_i)_A (\rho u_j)_B}$, $\overline{\rho_A (u_i)_A \rho_B}$, $\overline{(\rho u_i)_A (u_k)_A (\rho u_j)_B}$, ... Эти корреляции получаются из уравнений движения для плотности тока ρu_i относительно двух точек A и B рассматриваемого поля течения, которые дают в результате динамическое уравнение для корреляции $\overline{(\rho u_i)_A (\rho u_j)_B}$. Однако даже в случае несжимаемой жидкости получить полные решения динамических уравнений для двойной корреляции $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ оказалось невозможным. Излишне доказывать, что в случае сжимаемой жидкости это тем более безнадежно.

Пытаясь проникнуть в сущность влияния сжимаемости на турбулентность, Чандрасекар [43] рассмотрел корреляцию между пульсациями плотности в двух точках $\Omega = \overline{\tilde{\rho}_A \tilde{\rho}_B}$. Он показал, что вследствие условия сохранения массы (уравнение неразрывности) величина Ω должна удовлетворять следующему условию инвариантности:

$$\int_0^\infty r^2 \Omega(r, t) dr = \text{const},$$

если только изотропные тензоры первого ранга $\overline{\tilde{\rho}_A (u_i)_B}$, $\overline{\tilde{\rho}_A \tilde{\rho}_B (u_i)_B}$ с увеличением r уменьшаются достаточно быстро.

Из уравнений движения Chandrasekar вывел динамическое уравнение для $\Omega(r, t)$. Он показал, что при малых среднеквадратичных значениях числа Маха $u'/c \ll 1$ решение для $\Omega(r, t)$ может быть выражено в виде суперпозиции сферических волн, распространяющихся со скоростью $\sqrt{2}c$. Таким образом, любое изменение в распределении давления, а стало быть и в распределении плотности, тоже распространяется с конечной скоростью. Излучаемая при этом энергия под действием вязкости в конечном счете преобразуется в тепло. Следовательно, сжимаемость воздействует как еще один источник диссипации энергии в дополнение к вязким напряжениям сдвига. Это влияние можно заметить также и при непосредственном рассмотрении уравнений движения, так как в них содержится вязкий член, включающий в себя сжимаемость жидкости (или дилатацию θ). Лайтхилл [44] показал, что благодаря влиянию сжимаемости скорость диссипации энергии турбулентности возрастает пропорционально коэффициенту

$$1 + 40M^5.$$

Это соотношение справедливо для значений M , не превышающих примерно 0,5.

Лайтхилл [45] и Праудмен [46] исследовали генерирование звука под действием турбулентности более подробно. Звук, генерированный при изотропной турбулентности, отличается от звука сирены или колокола и представляет собой непрерывное поле квадрупольей, возбужденных пульсациями потока импульса $\rho u_i u_j$. Соответствующие пульсации плотности повышают среднеквадратичное значение давления. Это повышение очень невелико, и его можно оценить с помощью соотношения

$$p'^2 = \bar{\rho}^2 u'^4 \left(A + 40 \frac{M^4}{e\Lambda} \right),$$

где A — численная постоянная порядка 1, e — скорость диссипации акустической энергии на единицу длины [когда энергия звука затухает, как $\exp(-er)$], Λ — масштаб длины турбулентности.

Из анализа приведенных выше выражений для учета влияния сжимаемости на диссипацию энергии турбулентности и пульсацию p' можно сделать вывод, что при малых среднеквадратичных значениях числа Маха это влияние действительно очень слабо. Однако при более высоких значениях числа Маха это положение изменяется. Известно, что распространение волн расширения и сжатия при больших числах Маха происходит с повышенной кривизной фронтов, в результате чего образуются ударные волны. Взаимодействие между ударными волнами порождает дополнительную завихренность. Основываясь на этом, Лайтхилл [44] пришел к выводу, что, поскольку система ударных волн способна генерировать дополнительную турбулентность, свойства турбулентности при $M \approx 1$ или выше должны существенно отличаться от свойств, присущих турбулентности в несжимаемой жидкости.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$E_{i,j}$ — спектральный тензор кинетической энергии турбулентности.

$E(k, t) = 2\pi k^2 E_{i,i}(k, t)$ — функция трехмерного энергетического спектра.

$e_{i,j}$ — направляющие косинусы.

$F_{ik,j}$ — преобразование Фурье от $S_{ik,j}$.

$F_{i,j}$ — преобразование Фурье от $E_{i,j}$.

$F(k, t) = 2\pi k^2 F_{i,i}(k, t)$ — спектральная функция пространственного переноса.

f — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.

g — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

H — приток энергии к турбулентному движению.

h — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$I = \frac{u'^2}{3\pi} \int_0^\infty r^4 f(r, t) dr$ — интеграл Лойцянского.

K_i — корреляционный тензор первого ранга.

k — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$k = 2\pi n/\bar{U}$ — волновое число; k_i — компонента вектора волнового числа; k_e — волновое число из диапазона энергосодержащих вихрей; k_d — волновое число из диапазона основной диссипации.

l_e — средний размер энергосодержащих вихрей.

M — размер ячейки решетки.

M — число Маха.

n — частота.

p — турбулентная пульсация статического давления.

$Q_{i,j}$ — тензор корреляции скорости второго ранга.

q — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

Re — число Рейнольдса; $Re_\lambda = u'\lambda_g/\nu$; $Re_M = \bar{U}_1 M/\nu$.

r — расстояние между точками.

$S_{i,kj}$ или $S_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.

t — время.

U_i — эйлерова скорость; $\bar{U}_i$ — осредненная по времени величина; u_i — компонента турбулентной пульсации;

- $u'_i = V \overline{u_i^2}$ — среднеквадратичная величина компоненты турбулентной пульсации скорости; u_r — радиальная компонента; u_n — нормальная компонента.
 x_i — эйлеровы координаты в декартовой системе.
 α — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой вязкости ϵ .
 β — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой диффузии ϵ_γ .
 δ_{ij} — символ Кронекера.
 ϵ_{ijk} — антисимметричный единичный тензор.
 ϵ — диссипация на единицу массы под действием турбулентности.
 ϵ_γ — «диссипация» пульсаций γ .
 ϵ — коэффициент вихревой вязкости; ϵ_γ — коэффициент вихревой диффузии.
 η — $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.
 Γ — скалярная субстанция; $\tilde{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; γ — турбулентная пульсация.
 Γ — гамма-функция.
 i — $V \overline{-1}$.
 K — коэффициент теплопроводности.
 k — $K/c_p \rho$.
 Λ — пространственный интегральный масштаб; Λ_f — продольный масштаб; Λ_g — поперечный масштаб.
 λ — пространственный микромасштаб; λ_f — продольный масштаб; λ_g — поперечный масштаб.
 ν — кинематический коэффициент вязкости.
 π — 3,14159...
 $\mathcal{R}$ — $\epsilon t^2/\nu$.
 ρ — плотность; $\bar{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация.
 σ_{ij} — тензор напряжений.
 Θ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина; θ — турбулентная пульсация.
 v — $(\nu/\epsilon)^{1/4}$.
 ξ_i — эйлеровы координаты в декартовой системе.
-

ГЛАВА 4

НЕИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 4.1. Введение

Число работ, посвященных созданию теории неизотропной турбулентности, которые по своей завершенности походили бы на изложенные в предыдущей главе теории изотропной турбулентности, невелико. Основной причиной такого положения является чрезвычайное усложнение рассматриваемых проблем, как только речь заходит о неизотропности. Чтобы почувствовать это, читателю следует лишь обратиться к почти непреодолимым трудностям, встречающимся даже в теориях турбулентности наипростейшего типа, а именно изотропной турбулентности.

Осесимметричная турбулентность, второй по простоте после изотропной тип турбулентности, была впервые подвергнута анализу в нескольких работах Бэтчелора [1] и немного позднее рассматривалась Чандрасекаром [2, 3]. В отличие от изотропной турбулентности, в которой имеет место сферическая симметрия, осесимметричная турбулентность обладает симметрией только относительно заданного направления. Предполагается, что основное течение происходит именно в этом направлении и является равномерным, а турбулентность считается однородной. Среднее значение любой функции от скоростей и их производных инвариантно относительно поворота вокруг оси, совпадающей с заданным направлением, и относительно отражения от плоскостей, проходящих через эту ось и перпендикулярных к ней. Бэтчелор и Чандрасекар рассмотрели кинематику турбулентности этого типа почти с такой же исчерпывающей полнотой, как это оказалось возможным в случае изотропной турбулентности, и получили в замкнутом виде выражения для различных корреляционных тензоров через минимальное число определяющих скаляров.

Хотя, если следовать этим авторам, осесимметричная турбулентность, возможно, и ближе к действительности, чем изотропная турбулентность,

тем не менее она все еще далека от действительной турбулентности в силу предположений о равномерности основного течения и об отсутствии осредненных турбулентных напряжений сдвига. В этой главе мы не будем заниматься дальнейшим рассмотрением осесимметричной турбулентности, а ограничимся лишь перечислением того, что было внесено в теорию турбулентного потока со сдвигом, включая корреляции между скоростями и их производными. Хотя результаты, о которых идет речь, и являются пока еще весьма скудными, они наверняка помогут объяснить некоторые из характерных особенностей реальной турбулентности в потоке со сдвигом и, возможно, будут способствовать несколько лучшему пониманию ее.

В дальнейшем мы будем предполагать, что жидкость является несжимаемой, а основное движение — стационарным.

Поскольку турбулентные движения взаимодействуют с основным движением, так что каждое из них оказывает влияние на другое, наличие стационарного основного движения дает основания полагать, что статистические соотношения между турбулентными движениями тоже могут быть независимыми от времени. Однако, несмотря на предположение о стационарности основного движения, мы все же сохраним зависимость этих статистических соотношений от времени, с тем чтобы продемонстрировать некоторые тенденции обоюдного влияния их временных зависимостей.

Вначале мы рассмотрим динамику корреляций между компонентами скорости в некоторой точке турбулентного течения, а затем дадим обобщение на корреляции между скоростями в двух точках этого течения. В последнем случае задача значительно упрощается, если принять предположение об однородности. В главе 1 мы уже выяснили многие характеристики корреляций скорости, исходя всего-навсего из предположения об однородности. Однородную турбулентность со сдвигом можно представить себе только в том случае, если в основном потоке имеется постоянный градиент скорости в поперечном направлении по всему течению. Ограничение проблемы течением именно этого типа значительно способствует ее упрощению.

Как показали Бюргерс и Митчнер [4], для этого типа турбулентного течения со сдвигом отсутствие ограничивающих стенок означает отсутствие масштаба длины, который определял бы крупномасштабную структуру турбулентности (в отличие от реального течения). Согласно гипотезе подобия Кармана (см. главу 5), крупномасштабная структура в любом реальном турбулентном течении определяется масштабом, который представляется отношением $(\partial \bar{U}_i / \partial x_j) / (\partial^2 \bar{U}_i / \partial x_j^2)$ при $i \neq j$ (без какого-либо суммирования); при постоянном значении градиента скорости это отношение обращается в бесконечность.

Поскольку такой однородно турбулентный поток со сдвигом неосуществим, его тоже можно рассматривать как некоторый гипотетический случай, правда, менее отдаленный от случая реальной турбулентности, нежели рассмотренные до сих пор течения других типов.

§ 4.2. Динамика одноточечной корреляции скорости $\overline{u_i u_j}$

Динамическое уравнение для корреляции $\overline{u_i u_j}$ получается точно тем же способом, как и в предыдущих главах.

Уравнение движения несжимаемой жидкости для случая стационарного основного течения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\bar{U}_k + u_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U}_i + u_i) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} (\bar{U}_i + u_i) \end{aligned}$$

или, если к левой части прибавить $u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} (\bar{U}_i + u_i). \end{aligned}$$

Вычитая отсюда почленно уравнение, полученное после осреднения данного уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \overline{u_i u_k}) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Запишем то же уравнение для компоненты скорости u_j . Умножим обе части уравнения (4.1) на u_j , а обе части уравнения для u_j на u_i и затем сложим оба этих уравнения. В результате после осреднения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = \\ = -\left(\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k} \right) - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + \nu \left(\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}} \right). \quad (4.2) \end{aligned}$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned}\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j} - \overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \quad \text{и} \quad \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i} - \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}, \\ \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k} &= \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \overline{u_i u_j} &= \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}} + \overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}} + 2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}},\end{aligned}$$

уравнение (4.2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i} \right) + \frac{1}{\rho} \overline{p \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} + \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}}. \quad (4.3)\end{aligned}$$

Применяя здесь свертывание индексов, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_i} + 2 \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_i} = \\ = - 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2} \right) u_k + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_i}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{q}^2}{2} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\bar{q}^2}{2} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) u_k + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \frac{\bar{q}^2}{2} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}},\end{aligned}$$

что представляет собой уравнение энергии турбулентности (1.99), которое уже приводилось в главе 1, но вывод его был сделан иным способом. Интерпретация смысла различных членов этих уравнений дана в той же главе 1.

Анализируя уравнение (4.3), можно обнаружить некоторые интересные свойства, связанные с влиянием диффузии, вязкости и взаимодействия между компонентами скорости через их взаимные корреляции и корреляции давление—скорость на изменение отдельных членов корреляционного тензора $\overline{u_i u_j}$. Чтобы упростить выкладки, остановимся на случае плоского основного потока с компонентами осредненной скорости $\bar{U}_1 = f(x_2)$, $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0$ и однородного в направлении осей x_1 и x_3 , но не обязательно в направлении оси x_2 .

Ввиду симметрии потока относительно плоскостей, перпендикулярных к оси x_3 , все корреляции, содержащие величину u_3 и ее

нечетные производные по x_3 , обращаются в нуль. Отсюда все члены уравнений (4.3) с корреляциями $\overline{u_1 u_3}$ и $\overline{u_2 u_3}$ также являются нулями.

Остающиеся при этом уравнения системы (4.3), а именно уравнения для $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ и $\overline{u_1 u_2}$, имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_1^2} = -2 \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1^2 u_2} + \frac{2}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} + \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_1^2}}{\partial x_2^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_2^2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^3} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{p u_2} + \frac{2}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} + \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_2^2}}{\partial x_2^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_3^2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_3^2 u_2} + \frac{2}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_3}{\partial x_3}} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_3^2}}{\partial x_2^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_1 u_2} = -\overline{u_2^2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 \left(u_2^2 + \frac{p}{\rho} \right)} + \frac{p}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)} + \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}}. \quad (4.7)$$

Таким образом, в итоге имеем следующее: изменение величин $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ и $\overline{u_1 u_2}$ по времени определяется конвективной диффузией и влиянием вязкости, обусловленными неоднородностью потока в направлении оси x_2 , порождением энергии или переносом энергии от основного движения через турбулентные напряжения сдвига, эффектами, связанными с корреляциями между пульсациями давления и производными от пульсаций скорости, а также влиянием вязкости, носящим, в основном, диссипативный характер.

Слагаемые, зависящие от неоднородности поля течения, в зависимости от вида распределения неоднородности могут иметь либо положительный, либо отрицательный знак.

Вязкие члены типа $2\nu \overline{(\partial u_1 / \partial x_1) (\partial u_1 / \partial x_1)}$ и т. д. входят в соответствующие суммы для компонент интенсивности турбулентности с отрицательным знаком.

Что касается слагаемого, характеризующего порождение энергии $\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}$, то можно заметить, что оно появляется только в уравнении для компоненты $\overline{u_1^2}$.

Если рассмотреть, далее, случай $\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} > 0$, то величина $\overline{u_1 u_2}$ будет отрицательной.

Тогда слагаемое, связанное с порождением энергии, будет входить с положительным знаком в выражение для зависимости $\overline{u_1^2}$ от времени в отличие от уравнений для других компонент турбулентности. Следовательно, результатом порождения турбулентности является неизотропность, связанная с осевой компонентой турбулентной пульсации скорости.

Каково влияние корреляции давление—градиент скорости $\overline{p \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}$? Для анализа этого влияния следует лишь предположить, что если $\overline{u_1^2}$ намного больше, чем $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$, то в среднем эта корреляция дает отрицательный вклад в величину $\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial t}$. Это, конечно, не является точным аргументом или доказательством.

Возьмем в поле течения, движущемся с местной средней скоростью $\overline{U}_1$, некоторую точку O и рассмотрим турбулентное движение относительно нее. Пусть в заданный момент времени турбулентные скорости направлены так, как это показано на рис. 4.1, а. Предположим, что $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$; это может быть обусловлено, например,

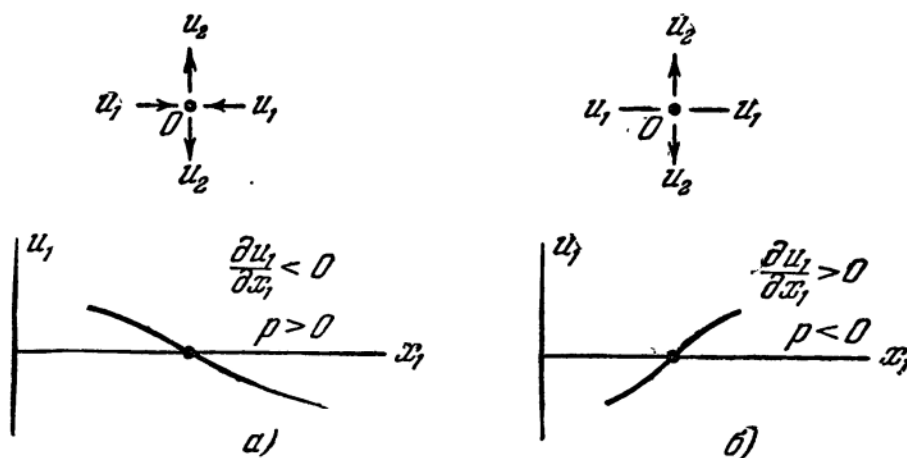


Рис. 4.1. К определению корреляции скорость — давление $\overline{p \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}$.

влиянием слагаемого, связанного с порождением энергии, которое содержится только в уравнении для $\overline{u_1^2}$. Тогда замедленному пространственному движению со скоростью u_1 в направлении к рассматриваемой точке будет соответствовать положительная величина местного давления p . Следовательно, имеем $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$ и $p > 0$, так что $p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$. Но в то же время $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} > 0$ и $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$, так что $p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} > 0$ и $p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$. Это является следствием уравнения неразрывности, ибо $p(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) = 0$; из того факта, что $p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$, следует $p(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) > 0$.

Обратный случай (рис. 4.1, б) ускоренного пространственного движения со скоростью u_1 в направлении от рассматриваемой точки связан с отрицательной величиной p . Следовательно, $\partial u_1 / \partial x_1 > 0$ и $p < 0$, и опять-таки $p \partial u_1 / \partial x_1 < 0$, $p \partial u_2 / \partial x_2 > 0$ и $p \partial u_3 / \partial x_3 > 0$.

Отсюда следует, что если в среднем $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$, то также в среднем $\overline{p \partial u_1 / \partial x_1} < 0$, $\overline{p \partial u_2 / \partial x_2} > 0$ и $\overline{p \partial u_3 / \partial x_3} > 0$. Значит, корреляция давление — градиент скорости $\overline{p \partial u_1 / \partial x_1}$ уменьшает величину $\partial \overline{u_1^2} / \partial t$, а корреляции $\overline{p \partial u_2 / \partial x_2}$ и $\overline{p \partial u_3 / \partial x_3}$ увеличивают соответственно величины $\partial \overline{u_2^2} / \partial t$ и $\partial \overline{u_3^2} / \partial t$. Окончательный вывод состоит в том, что поперечные компоненты u_2 и u_3 возрастают за счет осевой компоненты u_1 благодаря переносу энергии через посредство корреляции давление — градиент скорости. Влияние этой корреляции приводит к выравниванию всех трех компонент скорости, т. е. к тому, что турбулентность становится более изотропной.

Логично предположить [5], что перенос энергии от компоненты с большей интенсивностью к компоненте с меньшей интенсивностью через посредство корреляции давление — градиент скорости пропорционален разности интенсивностей, а именно:

$$\overline{p \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \sim -[\overline{u_1^2} - (\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})] = -(2\overline{u_1^2} - \overline{q^2}). \quad (4.8)$$

Обратимся к уравнению для компоненты турбулентного напряжения сдвига $\overline{u_1 u_2}$ из системы (4.7), ограничиваясь опять-таки рассмотрением членов, связанных с порождением энергии и с корреляцией давление — градиент скорости.

Если снова взять случай $\partial \overline{U_1} / \partial x_2 > 0$, то порождение энергии $\overline{u_2^2} \partial \overline{U_1} / \partial x_2$ войдет в выражение для $\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_1 u_2}$ с отрицательным знаком. Но ввиду того, что при $\partial \overline{U_1} / \partial x_2 > 0$ имеем $\overline{u_1 u_2} < 0$, указанный отрицательный знак приведет к увеличению значения $\overline{u_1 u_2}$. Такой же результат получается, если $\partial \overline{U_1} / \partial x_2 < 0$; при этом $\overline{u_1 u_2} > 0$.

Докажем теперь, что величина

$$\frac{1}{\rho} \overline{p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)}$$

входит в выражение для $\partial \overline{u_1 u_2} / \partial t$ с положительным знаком, если $\overline{u_1 u_2} < 0$, и с отрицательным знаком, если $\overline{u_1 u_2} > 0$. Для этой цели выразим корреляцию $\overline{u_1 u_2}$ через компоненты турбулентной пульсации скорости u_{1*} и u_{2*} соответственно вдоль осей x_{1*} и x_{2*} , которые

образуют с осями x_1 и x_2 угол φ (см. рис. 4.2). Пусть точка O находится в жидкости и движется вместе с осредненным потоком со скоростью $\bar{U}_1$. Тогда имеем

$$u_1 = u_{1*} \cos \varphi - u_{2*} \sin \varphi,$$

$$u_2 = u_{1*} \sin \varphi + u_{2*} \cos \varphi,$$

откуда

$$\overline{u_1 u_2} = (\overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2}) (\sin 2\varphi) / 2 + \overline{u_{1*} u_{2*}} \cos 2\varphi.$$

Положим $\varphi = 45^\circ$, так что оси x_{1*} и x_{2*} становятся главными осями распределения турбулентного напряжения; тогда

$$2\overline{u_1 u_2} = \overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2}. \quad (4.9)$$

Из формул преобразования осей координат можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}} \right) \sin 2\varphi + \left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{2*}} + \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{1*}} \right) \cos 2\varphi.$$

При $\varphi = 45^\circ$, т. е. при преобразовании к главным осям,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}},$$

следовательно,

$$p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = p \left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}} \right).$$

Если воспользоваться соотношением (4.8) и принять те же значения коэффициентов пропорциональности, то на основании (4.9) получим

$$p \left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}} \right) \sim -2(\overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2}) = -4\overline{u_1 u_2}$$

и

$$p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \sim -4\overline{u_1 u_2}.$$

Следовательно, величины $p(\partial u_2 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_2)$ и $\overline{u_1 u_2}$ обязательно должны иметь противоположные знаки, а влияние корреляции давле-

ние — градиент скорости должно проявляться в уменьшении абсолютной величины $\overline{u_1 u_2}$.

Ротта [5] произвел количественную оценку корреляции давление — градиент скорости и пришел к следующему выражению:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -A\rho \frac{V\sqrt{q^2}}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{q^2} \right),$$

где A — численная постоянная порядка единицы, а Λ — интегральный масштаб турбулентности.

Бюргерс и Митчнер [4] показали, что при малых волновых числах k функция, получаемая в результате преобразования Фурье из корреляции давление — градиент скорости, очень быстро возрастает с увеличением k (при очень малых k — пропорционально k^4). Стало быть, влияние этой корреляции с ростом волнового числа усиливается.

Полученный выше результат вкратце можно сформулировать следующим образом: турбулентное напряжение сдвига $\overline{u_1 u_2}$ может возникнуть только в том случае, когда осредненный поток является неравномерным.

Корреляции давление — градиент скорости имеют тенденцию ослабить неизотропность путем выравнивания всех трех компонент турбулентной пульсации скорости и уменьшения турбулентного напряжения сдвига.

Тенденция к изотропности сильнее всего проявляется в зоне мелкомасштабной турбулентности.

В связи с тем, что влияние вязкости через диссипацию с увеличением интенсивности турбулентности возрастает, то, коль скоро речь идет о неизотропной турбулентности, оно должно приводить к более быстрому затуханию компонент с высокой интенсивностью, нежели компонент с меньшей интенсивностью; иначе говоря, этот фактор также имеет тенденцию к выравниванию компонент. В этом случае рассмотренный эффект в диапазоне больших волновых чисел тоже проявляется сильнее.

§ 4.3. Динамика двухточечной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$

Выведем сначала динамическое уравнение для этой корреляции для общего случая неоднородной и неизотропной турбулентности. Хотя это уравнение и не поддается полному решению, все же, прежде чем перейти к рассмотрению более простого случая однородной турбулентности, весьма полезно также дать здесь и его вывод.

Возьмем уравнение (4.1), отнесенное к точке A , и умножим обе его части на величину $(u_j)_B$, соответствующую точке B :

$$(u_j)_B \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_A + (u_j)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)_A + (u_j)_B (\bar{u}_k)_A \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_A = \\ = - (u_j)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \bar{u}_i \bar{u}_k) \right]_A - \frac{1}{\rho} (u_j)_B \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_A + \nu (u_j)_B \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A.$$

Аналогично умножим обе части уравнения (4.1), отнесенного к точке B , на компоненту скорости, соответствующую точке A . Суммируя левые и правые части полученных соотношений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A (u_j)_B + (u_j)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)_A + (u_i)_A (u_k)_B \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)_B + \\ + (\bar{u}_k)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B + (\bar{u}_k)_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B = \\ = - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B \overline{(u_i u_k)}_A + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A \overline{(u_j u_k)}_B - \\ - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A \right] + \\ + \nu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_B \right] (u_i)_A (u_j)_B.$$

Вследствие неоднородности турбулентности, осредненные значения различных произведений скоростей турбулентных пульсаций, встречающихся в этом уравнении, зависят не только от расстояния между выбранными точками A и B , но и от местоположения этих точек в поле течения. Чтобы провести различие между влиянием расстояния и влиянием местоположения, введем в качестве новых независимых переменных [4] следующие величины:

$$\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A, \quad (4.10a)$$

$$(x_k)_{AB} = \frac{1}{2} [(x_k)_A + (x_k)_B]. \quad (4.10b)$$

Таким образом, для любой величины, которая зависит от $(x_k)_{AB}$ и ξ_k , имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial (x_k)_{AB}}{\partial (x_k)_A} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial (x_k)_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} - \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad (4.11a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial (x_k)_{AB}}{\partial (x_k)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial (x_k)_B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad (4.11b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_{AB} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial}{\partial \xi_k},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_B = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_{AB} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_{AB} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l}. \quad (4.12)$$

Если применить эти формулы к величинам, входящим в динамическое уравнение и зависящим от $(x_k)_{AB}$ и ξ_k , то после осреднения по времени и введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned} \overline{(u_i)_A (u_j)_B} &= Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ \overline{(u_l)_A (u_j)_B (u_k)_B} &= S_{i,kj}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ \overline{(u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A} &= S_{ik,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ \overline{p_A (u_j)_B} &= K_{p,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ \overline{p_B (u_i)_A} &= K_{i,p}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + Q_{k,j} \left(\frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k}\right)_A + Q_{i,k} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\right)_B + \\ + \frac{1}{2} [(\bar{U}_k)_A + (\bar{U}_k)_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} Q_{i,j} + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{i,j} = \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} (S_{i,kj} + S_{ik,j}) - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) - \\ - \frac{1}{2\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_{AB} K_{p,j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{AB} K_{i,p} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_l} K_{p,j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} \right] + \\ + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_{AB} Q_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Это — полное динамическое уравнение для двойной корреляции скорости $(Q_{i,j})_{AB}$ в общем случае неизотропной и неоднородной турбулентности.

Однородная турбулентность. Если рассматривается однородная турбулентность, то все производные от корреляций по $(x_k)_{AB}$ обращаются в нуль и уравнение (4.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + Q_{k,j} \left(\frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k}\right)_A + Q_{i,k} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\right)_B + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{i,j} = \\ = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_l} K_{p,j} \right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Во введении к этой главе уже упоминалось, что однородная турбулентность в потоке со сдвигом существует только тогда, когда основное движение имеет постоянную скорость в заданном направлении и постоянный градиент скорости в поперечном направлении по всему полю.

Не ограничивая общности, турбулентность можно описать с помощью такой системы координат, в которой основное параллельное

течение направлено вдоль одной из координатных осей. Таким образом, относительно этой системы координат имеем

$$\bar{U}_1 = f(x_2), \quad \bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0, \quad \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \text{const.}$$

Тогда уравнение (4.14) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + \left(\delta_{i1} Q_{2,j} + \delta_{j1} Q_{i,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j} \right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_i} Q_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В случае однородной турбулентности и рассматриваемой специальной системы координат статистические свойства турбулентности не изменятся, если одновременно изменить знаки координатных осей на обратные, а именно: ξ_1 на $-\xi_1$, ξ_2 на $-\xi_2$ и ξ_3 на $-\xi_3$. Иными словами, точка $\xi_i = 0$ является для этого типа турбулентности центром симметрии.

В общем случае произвольного однородного поля течения из условия инвариантности при переносе можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_j)_A (u_i)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_B (u_k)_A (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_B (u_k)_B (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[p_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[p_B (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3). \end{aligned}$$

В случае рассмотренной выше специальной системы координат из условия инвариантности при отражении получаем дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= - \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= - \overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\ \overline{[p_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= - \overline{[p_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3). \end{aligned}$$

Следовательно, если объединить обе системы соотношений, то

$$\begin{aligned} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= Q_{i,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = Q_{j,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ S_{i,kj}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -S_{i,kj}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -S_{kj,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -S_{ik,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -S_{j,ik}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ K_{p,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -K_{p,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -K_{j,p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Далее, вспомним о симметрии тройных корреляций скорости относительно индексов, соответствующих одной и той же точке; таким образом,

$$S_{lk,j} = S_{kl,j} \quad \text{и} \quad S_{l,kj} = S_{l,jk}.$$

Отсюда, принимая во внимание полученные выше соотношения для тройных корреляций скорости и корреляций давление — скорость, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{jk,i} + S_{ik,j}) = S_{i,j} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{j,p} = P_{i,j}, \quad (4.17)$$

и уравнение (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + \left(\delta_{i,1} Q_{2,j} + \delta_{j,1} Q_{i,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = S_{i,j} - \frac{1}{\rho} P_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_l} Q_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Так как $S_{i,kj}$ — нечетная функция ξ_i , то $S_{i,kj}(0) = 0$; но, кроме того, $S_{i,j}(0) = 0$, что следует из определения этой величины по уравнению (4.16). Тогда из уравнений (4.11а) и (4.11б) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A \right]$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} S_{i,j}(0) &= - \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) \right]_{\xi_i=0} = \\ &= - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A \right] \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B] - (u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B} \right\}_{A=B} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Этот результат носит общий характер и не требует выполнения условия однородности.

Далее, для однородной турбулентности из уравнения неразрывности следует, что

$$P_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{i,p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0.$$

Поэтому свертывание индексов в уравнении (4.18) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,i} + \left(2Q_{1,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,i} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,i} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_l} Q_{i,i}. \quad (4.20)$$

При $\xi_i = 0$ это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{q^2}}{2} + \overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{l,i} \right)_{\xi_i=0} = -\nu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad (4.21)$$

т. е. сводится к уравнению (1.99) для однородного случая.

Ввиду наличия в уравнениях (4.18) и (4.19) соответственно функций $S_{i,j}$ и $S_{i,i}$, получить решения этих уравнений без каких-либо дополнительных предположений относительно этих функций оказывается принципиально невозможным.

Ободренные результатами, полученными с помощью удачных предположений относительно преобразований Фурье от этих функций в случае изотропной турбулентности, Бюргерс и Митчнер [4] и Чен [6, 11] предприняли попытки получить решения для преобразования Фурье от $Q_{i,i}$ на основании предположений относительно преобразования Фурье от $S_{i,i}$, подобных тем, которые принимались в соответствующих теориях изотропной турбулентности.

§ 4.4. Динамическое уравнение энергетического спектра

При выводе этого уравнения для однородной турбулентности будем исходить из уравнения (4.18) и введем преобразования Фурье от функций $Q_{i,j}$, $S_{i,j}$ и $P_{i,j}$:

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (4.22)$$

$$S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (4.23)$$

$$P_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (4.24)$$

Чтобы получить преобразование Фурье от $\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j}$, поступим следующим образом.

Из (4.22) имеем

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j} = i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 k_1 E_{i,j} \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3,$$

откуда после однократного интегрирования по частям по k_2 следует

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int k_1 \frac{\partial E_{i,j}}{\partial k_2} \exp(ik_1 \xi_1) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (4.25)$$

Из динамического уравнения (4.18) с помощью выражений (4.22), (4.23), (4.24) и (4.25) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} + \left(\delta_{i1} E_{2,j} + \delta_{j1} E_{i,2} - k_1 \frac{\partial E_{i,j}}{\partial k_2} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = F_{i,j} - \frac{1}{\rho} \Pi_{i,j} - 2\nu k^2 E_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

которое является динамическим уравнением для спектральной функции $E_{i,j}$.

Вследствие того, что $P_{i,i} = 0$, имеем также и $\Pi_{i,j} = 0$; следовательно, свертывание индексов в уравнении (4.26) приводит к уравнению, соответствующему (4.20):

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,i} + \left(2E_{1,2} - k_1 \frac{\partial E_{i,i}}{\partial k_2} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = F_{i,i} - 2\nu k^2 E_{i,i}. \quad (4.27)$$

При изотропной турбулентности корреляционные и спектральные функции можно выразить через единственный скаляр, а именно через, соответственно, расстояние r и волновое число k .

Бэтчелор [7] предложил воспользоваться точно теми же методами и в случае неізотропной, но однородной турбулентности, применяя для этой цели осреднение корреляционных и спектральных функций по всем направлениям r и k в соответствующих пространствах, т. е. вычисляя, таким образом, средние значения этих функций соответственно на сферических поверхностях $r = \text{const}$ и $k = \text{const}$, например:

$$[E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{cp}} = \frac{1}{4\pi k^2} \int E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t) dA(k), \quad (4.28)$$

$$[Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{cp}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) dA(r). \quad (4.29)$$

Тогда связь между $(E_{i,i})_{\text{cp}}$ и $(Q_{i,i})_{\text{cp}}$ выражается известным соотношением [см. уравнение (3.56)]:

$$[Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{cp}} = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} [E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{cp}} dk. \quad (4.30)$$

Введем, как и в случае изотропной турбулентности, следующие новые спектральные функции:

$$\mathbf{E}(k, t) = 2\pi k^2 [\mathbf{E}_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F}(k, t) = 2\pi k^2 [\mathbf{F}_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}, \quad (4.32)$$

$$\mathfrak{E}(k, t) = 2\pi k^2 \left[2(\mathbf{E}_{1,2})_{\text{ср}} - \left(k_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{i,i}}{\partial k_2} \right)_{\text{ср}} \right]. \quad (4.33)$$

Физический смысл величины $\mathbf{E}(k, t)$ можно выяснить, исходя из соотношения (4.30):

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_{i,i}(0, t)]_{\text{ср}} = \mathbf{Q}_{i,i}(0, t) &= (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})_{\text{ср}} = \overline{q^2} = \\ &= 4\pi \int_0^\infty k^2 [\mathbf{E}_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}} dk = 2 \int_0^\infty \mathbf{E}(k, t) dk. \end{aligned}$$

Применяя к каждому из членов уравнения (4.27) операцию осреднения, описываемую формулой (4.28), и вводя спектральные функции по уравнениям (4.31) — (4.33), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(k, t) + \mathfrak{E}(k, t) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \mathbf{F}(k, t) - 2\nu k^2 \mathbf{E}(k, t), \quad (4.34)$$

откуда после интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k \mathbf{E}(k, t) dk + \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_0^k \mathfrak{E}(k, t) dk &= \\ &= \int_0^k \mathbf{F}(k, t) dk - 2\nu \int_0^k k^2 \mathbf{E}(k, t) dk. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Если верхний предел интеграла положить равным $k = \infty$, то получим уравнение, эквивалентное (4.21). Тогда отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \mathfrak{E}(k, t) dk = \overline{u_1 u_2}$$

и

$$\int_0^\infty \mathbf{F}(k, t) dk = 0.$$

Эти результаты можно также получить следующим образом. Из соотношения, описывающего преобразование Фурье

$$[S_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{ср}} = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} [\mathbf{F}_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}} dk,$$

следует [см. уравнение (4.19)]

$$[S_{l, l}(0, t)]_{\text{cp}} = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 [F_{l, l}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{cp}} dk = 2 \int_0^{\infty} F(k, t) dk = 0.$$

Из формулы

$$[Q_{1, 2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{cp}} = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin kr}{kr} [E_{1, 2}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{cp}} dk$$

вытекает соотношение

$$[Q_{1, 2}(0, t)]_{\text{cp}} = \overline{u_1 u_2} = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 [E_{1, 2}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{cp}} dk.$$

Из (4.25) следует, что

$$\left[\xi_2 \frac{\partial Q_{l, l}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial \xi_1} \right]_{\text{cp}} = -4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin kr}{kr} \left[k_1 \frac{\partial E_{l, l}(k_1, k_2, k_3, t)}{\partial k_2} \right]_{\text{cp}} dk,$$

а так как

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\xi_2 \frac{\partial Q_{l, l}}{\partial \xi_1} \right]_{\text{cp}} = 0,$$

то также и

$$\int_0^{\infty} k^2 \left[k_1 \frac{\partial E_{l, l}}{\partial k_2} \right]_{\text{cp}} dk = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{E}(k, t) dk = 2\pi \int_0^{\infty} k^2 \left[2(E_{1, 2})_{\text{cp}} - \left(k_1 \frac{\partial E_{l, l}}{\partial k_2} \right)_{\text{cp}} \right] dk = \overline{u_1 u_2}.$$

Тогда уравнение (4.35) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k, t) dk + \overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = -2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk = -\varepsilon. \quad (4.36)$$

Объединяя уравнения (4.35) и (4.36), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k, t) dk - \overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ &= 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t) dk - \frac{\partial}{\partial t} \int_k^{\infty} E(k, t) dk - \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_k^{\infty} \mathfrak{E}(k, t) dk - \\ &\quad - \int_0^k F(k, t) dk. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Для стационарного случая это уравнение упрощается:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ &= 2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk - \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_k^\infty \mathfrak{E}(k) dk - \int_0^k F(k) dk. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Отдельные члены этого уравнения можно интерпретировать следующим образом:

$\varepsilon = -\overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$	Полное порождение энергии турбулентности основным движением, или полная «диссипация» турбулентностью энергии основного движения.
$2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk$	Вязкая диссипация турбулентности в диапазоне волновых чисел от 0 до k .
$-\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_k^\infty \mathfrak{E}(k) dk$	Порождение энергии турбулентности в диапазоне волновых чисел от k до ∞ , или диссипация турбулентностью энергии основного движения в этом диапазоне.
$-\int_0^k F(k) dk$	Перенос энергии турбулентности в диапазоне волновых чисел от 0 до k к турбулентности с более высокими волновыми числами.

На основании этого уравнения к настоящему времени получено несколько решений для $E(k)$, справедливых в диапазоне больших волновых чисел.

Для получения этих решений воспользуемся предположениями и рассуждениями, принадлежащими Чену [6].

Прежде всего, волновое число k предполагается настолько большим, что турбулентность в этом диапазоне волновых чисел не слишком сильно отклоняется от изотропного состояния; следовательно, можно использовать гипотезы, которые успешно применялись в теориях изотропной турбулентности. Так, если воспользоваться предположением Гейзенберга (3.121) в отношении спектральной функции переноса $F(k)$, то получим

$$\int_0^k F(k) dk = - \int_k^\infty F(k) dk = -2\alpha' \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E(k) dk.$$

Другие предположения касаются члена

$$\int_k^\infty \mathfrak{E}(k) dk$$

в уравнении (4.38). Чен различает два случая:

1. Завихренность $d\bar{U}_1/dx_2$ основного движения мала по сравнению с завихренностью турбулентности в рассматриваемом диапазоне волновых чисел.

2. Завихренность основного движения сравнима с завихренностью турбулентности в рассматриваемом диапазоне волновых чисел.

Когда завихренность основного движения мала по сравнению с завихренностью турбулентного движения (случай 1), то между этими завихренностями может наблюдаться лишь едва заметное взаимодействие. Согласно Чену, явление резонанса не наблюдается.

С другой стороны, в случае 2, когда завихренности обоих этих движений сравнимы друг с другом, между ними возможны весьма сильные взаимодействия, и может наступить сильный резонанс.

Если рассматривать полный диапазон волновых чисел $0 < k < \infty$, то

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{E}(k) dk = \overline{u_1 u_2}.$$

Следуя концепции Буссинеска, введем коэффициент вихревой вязкости ϵ_m [см. уравнение (1.20)] таким образом, что

$$\overline{u_1 u_2} = -\epsilon_m \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}.$$

Чен полагает, что это соотношение применимо в указанном выше случае 1 (относительно малая завихренность основного движения):

$$\int_k^{\infty} \mathfrak{E}(k) dk = -\epsilon_m(k) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}, \quad (4.39)$$

а для $\epsilon_m(k)$ он использует гипотезу Гейзенберга:

$$\epsilon_m(k) = \alpha'' \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk.$$

Отсюда

$$\int_k^{\infty} \mathfrak{E}(k) dk = -\alpha'' \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} dk.$$

С помощью формулы (4.39) получаем соотношение

$$-\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_k^{\infty} \mathfrak{E}(k) dk = \epsilon_m(k) \left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right)^2, \quad (4.40)$$

которое, согласно гипотезе Гейзенберга, можно интерпретировать как диссипацию энергии основного движения под действием вихревой

вязкости:

диссипация = коэффициент вихревой вязкости $\times$ (завихренность)².

В случае 2, т. е. при сильном взаимодействии между завихренностями основного и турбулентного движений, Чен предлагает вместо квадрата завихренности основного движения в уравнении (4.40) взять произведение завихренностей обоих рассматриваемых движений.

Среднеквадратичное значение завихренности турбулентности представляется выражением $(\overline{\omega_k \omega_k})^{1/2}$, где

$$\omega_k = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\omega_k \omega_k} &= \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp})} = \\ &= \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) = - \left\{ \left[\frac{\partial^2 Q_{l,i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right]_{r=0} - \left[\frac{\partial^2 Q_{l,j}}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \right]_{r=0} \right\}. \end{aligned}$$

В случае однородной турбулентности имеем

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = Q_{j,i}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3, t),$$

а если жидкость является несжимаемой, то

$$\left[\frac{\partial^2 Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 Q_{j,i}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3, t)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \right]_{r=0} = 0.$$

Отсюда

$$\overline{\omega_k \omega_k} = - \left[\frac{\partial^2 Q_{l,i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right]_{r=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E_{l,i} dk_1 dk_2 dk_3$$

и

$$(\overline{\omega_k \omega_k})_{cp} = 4\pi \int_0^\infty k^4 (E_{l,i})_{cp} dk = 2 \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk.$$

Попутно можно отметить, что при однородной турбулентности диссипация на единицу массы становится равной кинематическому коэффициенту вязкости, умноженному на среднеквадратичную скорость деформации, и кинематическому коэффициенту вязкости, умноженному на среднеквадратичную завихренность. Выражение, в которое входят все эти три перечисленные величины, имеет вид

$$\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk.$$

Следовательно, в случае 2 вместо соотношения (4.39) получаем $\int_k^\infty \mathcal{E}(k) dk = -\epsilon_m(k) \times$ (завихренность турбулентности в диапа-

зоне волновых чисел от 0 до k) $= -\epsilon_m(k) \left[2 \int_0^k k^2 E(k) dk \right]^{1/2}$. На

основании принятых допущений члены $\int_k^\infty \mathcal{E}(k) dk$ и $\int_0^k F(k) dk$ выражаются через функцию энергетического спектра $E(k)$. Для обоих рассмотренных выше случаев уравнения для этой функции имеют вид:

Случай 1:

$$\begin{aligned} \epsilon = 2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk + \alpha'' \left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right)^2 \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk + \\ + 2\alpha' \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E(k) dk. \quad (4.41) \end{aligned}$$

Случай 2:

$$\begin{aligned} \epsilon = 2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk + \alpha'' \left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right) \left[2 \int_0^k k^2 E(k) dk \right]^{1/2} \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk + \\ + 2\alpha' \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E(k) dk. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Анализ случая 1. Решение уравнения (4.41) можно получить следующим путем.

Обозначим

$$\int_0^k k^2 E(k) dk = \Theta(k),$$

так что

$$E(k) = \frac{1}{k^2} \frac{d\Theta}{dk}.$$

Путем некоторых преобразований уравнение (4.41) можно привести к виду

$$\frac{\epsilon - 2\nu\Theta}{\alpha'' (d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\Theta} = \int_k^\infty \sqrt{\frac{1}{k^5} \frac{d\Theta}{dk}} dk.$$

Можно заметить, что это выражение отличается от соответствующего выражения для изотропной турбулентности только добавлением к величине $2\alpha'\Theta$ постоянного слагаемого $\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2$. Как будет ясно из дальнейшего, форма искомого решения, по существу, нечувствительна к этому дополнительному слагаемому. Дифференцирование этого выражения по k после несложных преобразований приводит к уравнению

$$\frac{d\Theta/dk}{[\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\Theta]^4} = \frac{1}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\varepsilon]^2 k^5},$$

которое легко интегрируется. Постоянная интегрирования определяется из условия, что $\Theta = \varepsilon/2\nu$ при $k \rightarrow \infty$ [см. уравнение (4.36)]. Окончательный результат записывается следующим образом:

$$\left[\alpha''\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2 + 2\alpha'\Theta\right]^3 = \frac{4[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\varepsilon]^2 k^4}{6\alpha' + \frac{32\nu^3}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\varepsilon]} k^4}.$$

Отсюда

$$E(k) = \frac{1}{k^2} \frac{d\Theta}{dk} = \frac{[\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\Theta]^4}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\varepsilon]^2 k^7},$$

или

$$E(k) = \frac{4[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + \alpha'\varepsilon]^{2/3} k^{-5/3}}{\left\{3\alpha' + \frac{8\nu^3}{[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + \alpha'\varepsilon]} k^4\right\}^{4/3}}. \quad (4.43)$$

Для не слишком больших значений k получаем закон « $-5/3$ », известный для невязкой инерционной подобласти в случае изотропной турбулентности. С другой стороны, при очень больших k имеем

$$E(k) \approx \left(\frac{\alpha'\varepsilon}{2\nu^2}\right)^2 \left[1 + \frac{\alpha''}{\alpha'} \frac{\nu}{\varepsilon} \left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2\right]^2 k^{-7},$$

что представляет собой решение, полученное Ченом [6]. В случае изотропной турбулентности это решение приводится к уравнению (3.127), полученному для вязкой подобласти. Однако эти решения неприемлемы, потому что гипотеза Гейзенберга в вязкой области несправедлива (см. § 3.5).

Ввиду того, что $\mathfrak{E}(k) = \sqrt{E(k)/k^3}$, на основании формулы (4.43) получим

$$\mathfrak{E}(k) = \frac{2[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + \alpha'\varepsilon]^{1/3} k^{-7/3}}{\left\{3\alpha' + \frac{8\nu^3}{[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + \alpha'\varepsilon]} k^4\right\}^{2/3}}.$$

Это выражение при больших k сводится к закону « k^{-5} », но для умеренных значений k величина $\mathfrak{E}(k)$ становится пропорциональ-

ной $k^{-7/3}$. Можно отметить, что если отклонение от изотропности весьма мало и, значит, $(k_1 \partial \mathbf{E}_{i,j} / \partial k_2)_{\text{ср}} \approx 0$, то спектральная функция $4\pi k^2 (\mathbf{E}_{1,2})_{\text{ср}}$ величины $u_1 u_2$ приблизительно соответствует $\mathcal{E}(k)$.

Как указывалось, решение (4.43) по своей природе совершенно одинаково с решением, полученным для равновесной области в случае изотропной турбулентности, т. е. с формулой (3.128). Точно такое же выражение получается, если

$$\nu \alpha'' \left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right)^2 \ll \alpha' \varepsilon,$$

а именно:

$$\mathbf{E}(k) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha'} \right)^{2/3} \frac{k^{-5/3}}{[1 + (8\nu^3/3\alpha'^2\varepsilon) k^4]^{1/3}}.$$

Бюргерс и Митчнер [4] нашли это решение прямым путем, исходя из предположения об очень больших значениях k ; тогда

$$\int_k^\infty \mathcal{E}(k) dk \approx 0$$

и вторым членом в правой части уравнения (4.41) можно пренебречь. Это предположение, по-видимому, подразумевает также и малые значения $d\bar{U}_1/dx_2$.

Анализ случая 2. В отличие от случая 1, решение полного уравнения (4.42) в замкнутой форме во втором случае получить не удастся. Но, как подчеркнул Чен [6], главным, представляющим интерес выводом в этом случае является тот факт, что завихренность $d\bar{U}_1/dx_2$ основного движения велика и, стало быть, влияние его взаимодействия с турбулентным движением превалирует над вязкой диссипацией и вихревым обменом. Логично ожидать, что этот факт, если он действительно имеет место, должен наблюдаться в диапазоне невязких волновых чисел, где значения k невелики. Поэтому мы будем рассматривать в правой части уравнения (4.42) только второй член и пренебрежем двумя другими членами. Преобразованное таким образом приближенное уравнение имеет вид

$$\varepsilon \approx \alpha'' \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \left[2 \int_0^k k^2 \mathbf{E}(k) dk \right]^{1/2} \int_k^\infty \sqrt{\frac{\mathbf{E}(k)}{k^3}} dk. \quad (4.44)$$

Это уравнение допускает решение в замкнутой форме.

Пусть

$$2 \int_0^k k^2 \mathbf{E}(k) dk = [\varphi(k)]^2,$$

Подстановка в (4.44) дает

$$\frac{\varepsilon}{\alpha'' d\bar{U}_1/dx_2} \frac{1}{\varphi} = \int_k^\infty V \sqrt{\frac{\varphi}{k^5} \frac{d\varphi}{dk}} dk.$$

После дифференцирования этого выражения по k и последующих преобразований получаем уравнение

$$\frac{1}{\varphi^5} \frac{d\varphi}{dk} = \left[\frac{\alpha''^2 (d\bar{U}_1/dx_2)^2}{\varepsilon^2} \right] k^{-5},$$

которое легко может быть проинтегрировано. Если постоянную интегрирования положить равной нулю, то придем к особенно простому решению для φ^2 :

$$\varphi^2 = \frac{\varepsilon k^2}{\alpha'' (d\bar{U}_1/dx_2)},$$

откуда

$$E(k) = \frac{\varphi}{k^2} \frac{d\varphi}{dk} = \frac{\varepsilon k^{-1}}{\alpha'' (d\bar{U}_1/dx_2)}. \quad (4.45)$$

При анализе полученных результатов следует, прежде всего, обратить внимание на то, что в случае 1 для энергетического спектра $E(k)$ в диапазоне больших волновых чисел получены решения, существенно одинаковые с решениями для изотропной турбулентности. В конце концов, этот факт по причинам, высказанным выше, с математической точки зрения едва ли может показаться неожиданным.

Но и с физической точки зрения тоже можно было бы ожидать подобных решений, так как мы сделали предположение о том, что в рассматриваемом диапазоне больших волновых чисел турбулентность почти изотропна; стало быть, относительно функции переноса и коэффициента вихревой диффузии можно принять те же предположения, что и в случае изотропной турбулентности. В случае 1 непосредственного взаимодействия между основным движением и турбулентностью не происходит. Однако ясно, что имеет место порождение турбулентности основным движением, которое в данном случае действует как постоянный источник энергии турбулентности.

Роль основного движения в случае 2 несколько отлична; благодаря своей собственной большой завихренности оно не только служит постоянным источником энергии, но также и очень сильно взаимодействует с турбулентностью. Этим эффектом обусловлено отличие энергетического спектра в том диапазоне волновых чисел, в котором как раз и происходит подобное сильное взаимодействие между этими двумя движениями.

Насколько можно судить по имеющимся экспериментальным данным, они, по-видимому, подтверждают изложенные выше выводы. Измерения одномерного энергетического спектра осевой компоненты турбулентной пульсации скорости в турбулентном потоке с поперечным сдвигом вблизи стенки были произведены Клебановым и Дилем [8], Лауфером [9], а также Крайя и Мийа [10]. Подобные турбулентные течения являются неоднородными; кроме того, приведенные выше теоретические результаты относятся к пространственному, а не к одномерному энергетическому спектру.

Чен [6] показал, что результаты, подобные тем, которые были изложены выше относительно функции $E(k)$, получаются и в том случае, когда турбулентность в потоке с поперечным сдвигом является неоднородной.

Что касается применимости результатов, относящихся к пространственному спектру, также и в случае измеряемого в опытах одномерного спектра, то можно заметить, что если турбулентность в диапазоне больших волновых чисел является почти изотропной, то с некоторой степенью приближения можно применять приведенные в главе 3 соотношения между пространственным и одномерным спектрами; следовательно, в этих случаях получаются одинаковые соотношения. Но в то же время между динамическими уравнениями для $E_1(k_1)$ и $E(k)$ существует различие, состоящее в том, что в уравнении для $E_1(k_1)$ содержится спектральная функция корреляции давление — скорость. При рассмотрении соответствующего уравнения (4.4) для распределения энергии $\overline{u_1^2}$ по всем волновым числам было показано, что корреляция давление — градиент скорости оказывает влияние на перенос энергии к другим компонентам скорости. Таким образом, хотя в уравнении полной энергии фигурирует перенос энергии, представленный только функцией турбулентного переноса по различным волновым числам, тем не менее в уравнении энергии для одной компоненты скорости дополнительно содержится перенос энергии по трем компонентам скорости, соответствующий корреляции давление — градиент скорости.

Согласно уравнениям (4.4) — (4.6), в случае, когда основное движение представляет собой однородный параллельный поток, порождение турбулентности основным движением осуществляется только в отношении $\overline{u_1^2}$ -компоненты турбулентности. Таким образом, сильное взаимодействие между основным движением и турбулентностью, подобное описанному в случае 2, может наблюдаться только в отношении компоненты $\overline{u_1^2}$. Следовательно, решения, подобного выражению (4.45), если оно вообще существует, можно ожидать только для энергетического спектра компоненты $\overline{u_1^2}$, но не для энергетического спектра поперечных компонент.

На рис. 4.3 изображены результаты измерений, проведенных Лауфером [9] в полностью развитом турбулентном потоке в трубе с диаметром 25 см. Число Рейнольдса, отнесенное к средней скорости потока и диаметру трубы, составляло $5 \cdot 10^5$. Число Рейнольдса турбулентности $Re_\lambda = u'_1 \lambda_g / \nu$ было несколько выше 200, что превосходит все значения числа Рейнольдса, когда-либо полученные

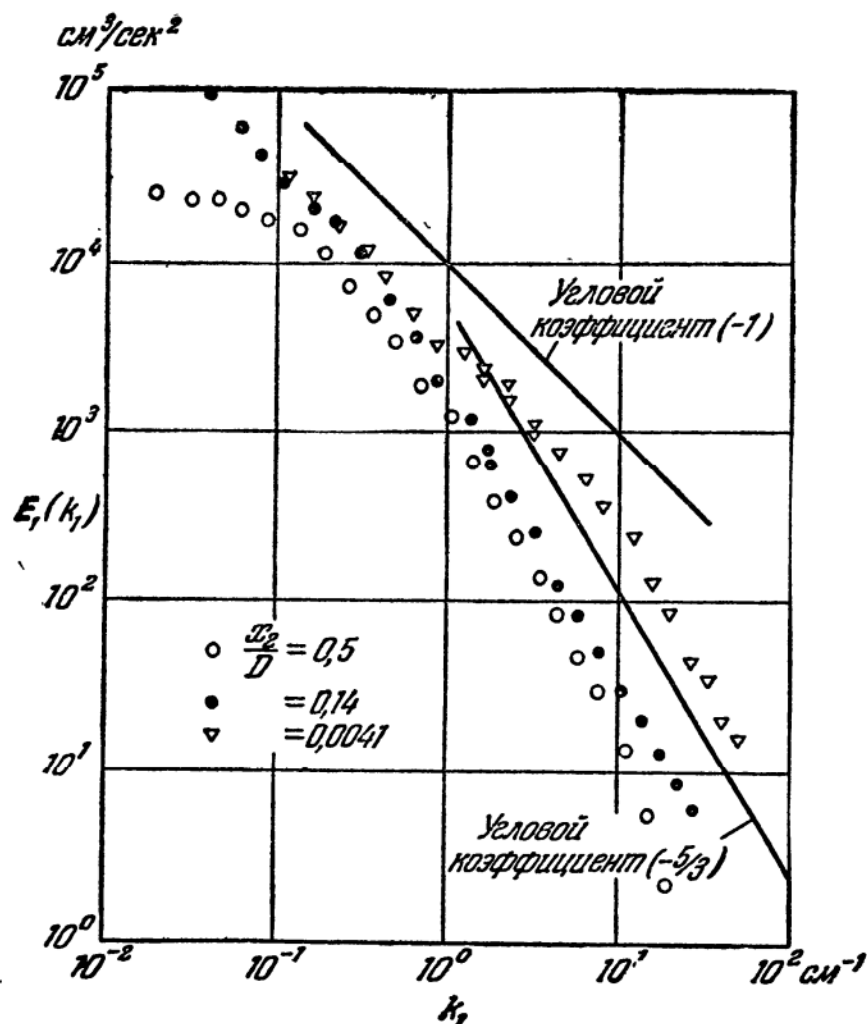


Рис. 4.3. Энергетический спектр пульсаций u_1 при течении в трубе; $Re_D = \bar{U}_{cp} D / \nu = 5 \cdot 10^5$ [9].

в изотропных турбулентных потоках за решетками. Это значение Re_λ достаточно велико, чтобы можно было предполагать довольно широкий диапазон волновых чисел, в котором существует равновесие. Как показывает этот рисунок, точки спектральных кривых для расстояний, не слишком близких к стенке, охватывают даже более широкий диапазон, в котором наблюдается хорошее соответствие с законом $E_1(k_1) \sim k_1^{-5/3}$. Экспериментальные точки, соответствующие очень малому расстоянию от стенки, указывают на существование диапазона, в котором хорошо оправдывается зависимость $E_1(k_1) \sim k_1^{-1}$.

Лауфер определил также одномерные спектры поперечных компонент u_2 и u_3 . На рис. 4.4 приведены экспериментальные данные для компоненты u_2 (нормальной к стенке). Экспериментальные точки заметно отходят от соответствующих кривых для осевой компоненты даже в центре трубы, где отклонение от изотропности можно считать наименьшим. На том же рисунке показана кривая, построенная по измеренным значениям $E_1(k_1)$ для центра трубы в предположении об изотропности турбулентности. Заметно, что в диапазоне малых волновых чисел

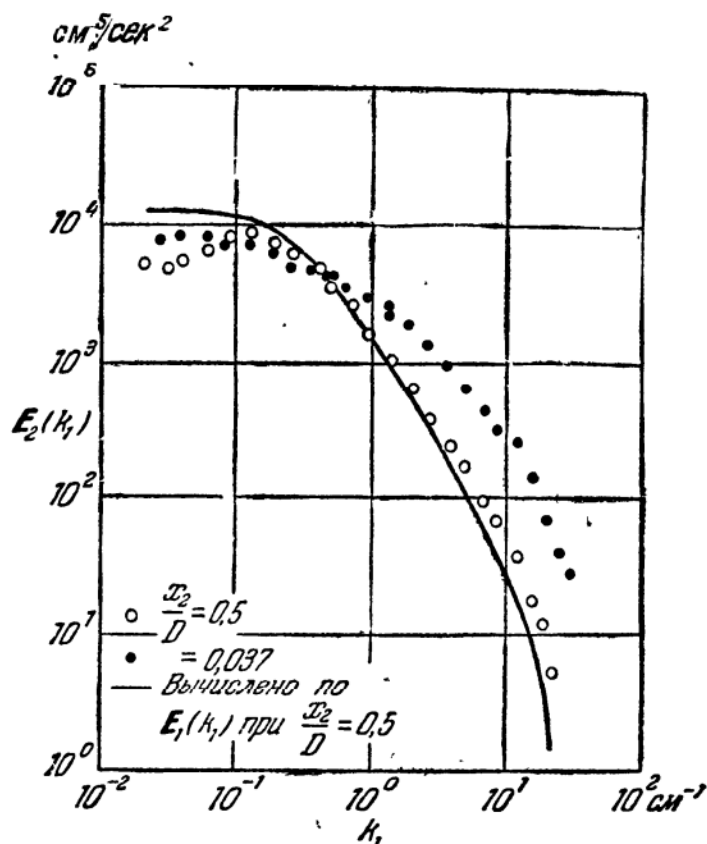


Рис. 4.4. Энергетический спектр пульсаций u_2 при течении в трубе;
 $\text{Re}_D = \bar{U}_{\text{cp}} D / \nu = 5 \cdot 10^5$ [9].

уровень энергии в спектре компоненты u_2 существенно ниже и что в диапазоне больших волновых чисел это различие исчезает, а в диапазоне наибольших волновых чисел даже принимает обратный характер. Это можно объяснить тем фактом, что энергия компоненты u_1 порождается основным движением, главным образом, в диапазоне малых волновых чисел, соответствующем области энергосодержащих вихрей. Часть этой энергии переносится в диапазон больших волновых чисел этой компоненты; другая ее часть переносится через посредство корреляции давление — градиент скорости к компонентам u_1 и u_3 . Поскольку в этой корреляции содержится градиент скорости, логично ожидать, что в последнем случае перенос будет происходить

с большей скоростью в диапазоне более высоких волновых чисел.

Одномерные спектры осевой компоненты скорости, измеренные Клебановым и Дилем, а также Крайя и Мийа, в точках, очень близко

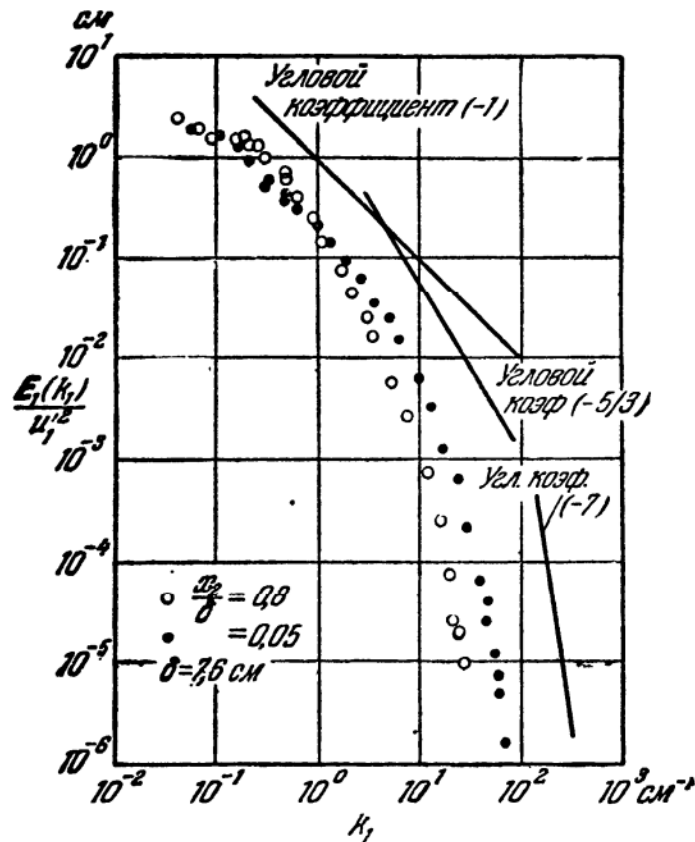


Рис. 4.5. Энергетический спектр пульсации u_1 при течении в пограничном слое; $Re_\delta = U_0 \delta / \nu = 7,5 \cdot 10^4$ [8].

расположенных от стенки, тоже тяготеют к зависимости вида k_1^{-1} , а в точках, находящихся на некотором удалении от стенки — к зависимости вида $k_1^{-5/3}$.

Для всех спектров характерно очень резкое затухание в диапазоне наибольших волновых чисел. Этот вывод особенно четко проиллюстрирован на рис. 4.5, где изображены данные Клебанова и Диля [8]. Здесь же проведена линия, угловой коэффициент которой равен (-7) . Однако экспериментальные точки, соответствующие расстоянию $x_2/\delta = 0,05$, указывают на постепенное увеличение отрицательного наклона, превосходящего коэффициент (-7) .

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

$E_{i,j}$ — спектральный тензор кинетической энергии турбулентности.

$E(k, t) = 2\pi k^2 [E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{cp}$ — функция трехмерного энергетического спектра, осредненная по сферической поверхности в пространстве волновых чисел.

- $F_{i,j}$ — преобразование Фурье от $S_{i,j}$.
 $F(k, t) = 2\pi k^2 [F_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}$ — спектральная функция трехмерного переноса, осредненная по сферической поверхности в пространстве волновых чисел.
 K_i — корреляционный тензор первого ранга.
 k — волновое число.
 P — статическое давление, $\bar{P}$ — осредненная по времени величина, p — турбулентная пульсация.
 $P_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{j,p}$.
 $Q_{i,j}$ — тензор корреляции скорости второго ранга.
 $\overline{q^2}$ — удвоенная кинетическая энергия турбулентности.
 $Re_\lambda = u' \lambda_g / \nu$ — число Рейнольдса турбулентности.
 $S_{i,kj}$ или $S_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.
 t — время.
 U_i — эйлерова скорость; $\bar{U}_i$ — осредненная по времени величина; u_i — компонента турбулентной пульсации;
 $u'_i = \sqrt{\overline{u_i^2}}$.
 x_i — эйлерова координата.
 α — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой вязкости ϵ_m .
 δ_{ij} — символ Кронекера.
 $\mathcal{E}(k, t) = 2\pi k^2 \left[2(E_{1,2})_{\text{ср}} - \left(k_1 \frac{\partial E_{i,i}}{\partial k_2} \right)_{\text{ср}} \right]$.
 ϵ_{ijk} — единичный антисимметричный тензор.
 ϵ_m — коэффициент вихревой вязкости.
 ϵ — диссипация под действием турбулентности на единицу массы.
 $i = \sqrt{-1}$.
 Λ — пространственный интегральный масштаб.
 λ_g — пространственный поперечный микромасштаб.
 ν — кинематический коэффициент вязкости.
 ω_k — завихренность турбулентности.
 $\Pi_{i,j}$ — преобразование Фурье от $P_{i,j}$.
 $\pi = 3,14159 \dots$
 ρ — плотность.
 ξ_i — эйлерова координата.
-

ГЛАВА 5

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

§ 5.1. Введение

В главе 1 было показано, что перенос какой-либо субстанции хаотичным движением жидкости носит диффузионный характер. Поскольку турбулентное движение жидкости как раз и является таким хаотичным движением, основная характерная особенность турбулентного потока состоит именно в его диффузионном действии; соответственно процессы обмена в турбулентных потоках играют бóльшую роль, нежели в нетурбулентных. Любая особенность турбулентного течения жидкости, по-видимому, имеет своим началом процесс переноса под действием турбулентности; в таком случае изучение подобной особенности сводится к исследованию соответствующих проблем переноса.

Поэтому представляется целесообразным широко и подробно рассмотреть различные проблемы турбулентного переноса в специальной главе. Общую задачу можно сформулировать следующим образом [68]: выразить интенсивность турбулентного переноса какой-либо субстанции полностью через статистические функции поля турбулентной скорости и граничные или начальные условия.

Таким образом, полного решения проблемы переноса можно ожидать лишь в том случае, когда имеются исчерпывающие сведения о статистических функциях, описывающих турбулентное движение. До тех пор, пока подобных исчерпывающих сведений будет недостаточно, любое решение проблемы переноса обязательно будет неполным и, в лучшем случае, приближенным. Чем больше будут возрастать наши знания о турбулентности, тем ближе станет возможность получения точного и удовлетворительного решения.

Очевидно, что на ранних этапах исследования турбулентности, когда наши знания о механизме турбулентного течения жидкости были довольно скудными, процессы переноса могли изучаться лишь весьма приближенным образом.

Однако эти процессы переноса еще на ранних этапах исследования турбулентного течения уже превратились в центральную проблему.

Среди теорий, возникших на базе этих исследований, наиболее плодотворными оказались те, которые были основаны на понятии «пути смещения» (введенном Тэйлором и независимо от него Прандтлем). Ценность этих теорий состоит не столько в том, что они верно описывают механизм, лежащий в основе процессов турбулентного обмена, сколько в том, что они позволили получить полезные и практически важные полуэмпирические соотношения.

Эти теории являются чисто феноменологическими. Хотя последние исследования и показали, что физическая картина, основанная на понятии пути смещения, не может быть правильной в деталях, все же теории пути смещения наиболее часто используются инженерами. Именно по этой причине рассмотрению этих феноменологических теорий в настоящей главе будет уделено столь много места. Это представляется еще более оправданным и по той причине, что современные исследования пока не дали более правильных теорий, которые с практической, инженерной точки зрения смогли бы успешно заменить теории пути смещения.

Последние исследования значительно расширили и углубили наше проникновение в действительный механизм процесса турбулентного переноса. С одной стороны, они указали на многие серьезные недостатки теорий пути смещения, но, с другой стороны, они подтвердили некоторые характерные особенности, связанные с понятием пути смещения, введенным Прандтлем на основании чисто интуитивных представлений.

В турбулентном потоке частицы жидкости движутся хаотично. Природа этих движений зависит от размера рассматриваемой частицы жидкости. В предыдущей главе эта зависимость была выражена через посредство различных спектральных функций и масштабов (например, микромасштаба и интегрального масштаба). При изучении процессов переноса зачастую оказывается полезным проводить различие между движениями частиц жидкости разных размеров. В этом смысле мы будем различать жидкие частицы и жидкие моли. Под понятием жидкой частицы мы подразумеваем очень небольшой объем жидкости, малый по сравнению, например, с микромасштабом λ . Континуум, образующий жидкую частицу, сохраняет свою целостность по крайней мере в течение интервала времени, достаточно большого по сравнению с интервалом, который следует рассматривать в ходе процесса переноса [68]. Какой-либо обмен с непосредственно окружающей частицу средой является по своей природе чисто молекулярным. Распределение давления и скорости внутри подобной частицы практически равномерно.

Под понятием жидкого моля мы подразумеваем значительно более протяженную часть жидкого континуума, состоящую из когерентного конгломерата жидких частиц. Размер подобного жидкого моля может быть сравним с интегральным масштабом турбулентного

движения, причем обмен с окружающей его средой будет определяться влиянием мелкомасштабных турбулентных движений.

Принято различать два метода описания процессов турбулентного переноса. Один из них известен как метод Эйлера, а другой — как метод Лагранжа. При использовании метода Эйлера рассматривается изменение некоторой субстанции относительно фиксированной системы координат; в методе Лагранжа рассматривается изменение субстанции, связанной с данной жидкой частицей или жидким молекул, при движении этой частицы или молекулы в потоке. В последующем будут использоваться оба метода, и при этом зачастую одновременно, поскольку в методе Эйлера может оказаться необходимым использовать результаты метода Лагранжа относительно свойств движущегося объема жидкости.

§ 5.2. Теория пути смешения и феноменологические теории

Эти теории первоначально применялись для описания распределения средних значений какой-либо субстанции (импульса, тепла, вещества и т. д.) под влиянием турбулентности.

В ранних теориях, в том числе и в теориях пути смешения, для описания переноса какой-либо субстанции использовался метод Эйлера. Считалось, что диффузионное воздействие турбулентности обуславливает вихревую вязкость или вихревую теплопроводность, по которым может быть вычислено распределение средних значений аналогично тому, как в кинетической теории газов принимается, что процессы молекулярного переноса приводят к вязкости и теплопроводности.

В качестве исходных соотношений будем использовать уравнения движения и уравнение переноса, предложенное Буссинеском [см. уравнение (1.17) совместно с уравнением (1.20) и уравнение (1.28) совместно с уравнением (1.29)]. Сам Буссинеск полагал, что коэффициенты вихревой диффузии ϵ_m и ϵ_T являются скалярными величинами. Прандтль [1] сделал попытку связать эти величины с характеристиками турбулентности. Согласно кинетической теории газов, коэффициент кинематической вязкости равен произведению среднеквадратичного значения скорости молекул и среднего пути свободного пробега; по аналогии, Прандтль ввел предположение, что коэффициент вихревой вязкости равен произведению пути «смешения» и некоторой соответствующей скорости (теория пути смешения). Ход рассуждений Прандтля аналогичен соображениям, на которых основана кинетическая теория газов, и вкратце сводится к следующему.

Рассмотрим для простоты плоский поток с осредненной скоростью $\bar{U}$, в направлении оси x_1 и средний перенос через плоскость,

параллельную $\bar{U}_1$, некоторой субстанции $\mathcal{P}$ на единицу массы, обусловленный скоростью u_2 турбулентных движений. Прандтль выдвинул предположение, что каждый моль жидкости, участвующий в турбулентном движении, может рассматриваться как некоторая индивидуальность и что субстанция $\mathcal{P}$ этого моля сохраняется в течение определенного промежутка времени, т. е. на определенном расстоянии. Обозначим через L_α это расстояние для моля жидкости, отмеченного знаком α , с объемом V_α ; величина L_α отрицательна, если движение моля начинается со стороны отрицательного направления оси x_2 . Если распределение субстанции $\mathcal{P}$ по полю неравномерно, то среднее значение $\bar{\mathcal{P}}$ в точке, удаленной от рассматриваемой плоскости на расстояние L_α , будет отличаться от среднего значения в этой плоскости. Тогда перенос субстанции $\mathcal{P}$ молею α через рассматриваемую плоскость выразится как $\rho V_\alpha \Delta \mathcal{P}$.

Величину $\Delta \mathcal{P}$ можно разложить в ряд Тэйлора, что дает

$$\Delta \bar{\mathcal{P}} = L_\alpha \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dx_2} + \frac{1}{2} L_\alpha^2 \frac{d^2 \bar{\mathcal{P}}}{dx_2^2} + \dots$$

Прандтль ввел предположение, что расстояние L_α достаточно мало, чтобы членами второго и более высоких порядков в этом разложении можно было пренебречь. По Прандтлю, величина L_α имеет порядок размера моля.

Если N молей жидкости проходят в единицу времени через площадь F рассматриваемой плоскости, то перенос величины $\bar{\mathcal{P}}$ в единицу времени через эту площадь составляет

$$+ \sum_N \rho V_\alpha L_\alpha \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dx_2}.$$

Величины L_α и V_α неодинаковы для всех молей, проходящих через эту плоскость. Однако можно ввести новую длину L , определяемую таким образом, чтобы перенос в единицу времени записывался в следующем виде:

$$\sum_N V_\alpha L_\alpha = F \bar{u}_2 L.$$

Следовательно, перенос субстанции $\bar{\mathcal{P}}$ через единицу площади в единицу времени выразится формулой

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}} = + \rho \bar{u}_2 L \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dx_2}. \quad (5.1)$$

Величина $\bar{u}_2 L$ является существенно отрицательной, так как положительному значению u_2 должно соответствовать отрицательное значение L и наоборот. Отсюда, если градиент $d\bar{\mathcal{P}}/dx_2$ положителен,

то поток $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ через рассматриваемую плоскость имеет отрицательный знак.

Пусть $\overline{\mathcal{P}}$ является компонентой импульса в направлении оси x_1 , отнесенного к единице массы жидкости, т. е. $\overline{U}_1$; тогда перенос импульса на единицу объема через единицу площади нашей плоскости запишется так:

$$\mathfrak{S}_m = + \overline{u_2 L_m} \frac{d}{dx_2} \rho \overline{U}_1.$$

Перенос через рассматриваемую плоскость импульса на единицу объема $\rho \overline{U}_1$ вызывает напряжение сдвига σ_{12} в этой плоскости:

$$\sigma_{12} = - \mathfrak{S}_m = - \rho \overline{u_2 L_m} \frac{d \overline{U}_1}{dx_2}.$$

Тогда, по определению, получим следующее выражение для коэффициента вихревой вязкости ϵ_m :

$$\epsilon_m = - \overline{u_2 L_m}.$$

Обобщение на случай трехмерного потока может быть сделано без труда. Рассмотрим элементарную плоскую площадку, перпендикулярную к i -му направлению и движущуюся со средней местной скоростью $\overline{U}_i$. Тогда перенос через эту элементарную площадку в единицу времени на единицу площади выразится как $\rho (\overline{U}_i \overline{\mathcal{P}} - \overline{U_i \mathcal{P}})$. При

$$\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}} + L_j \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x_j} + \dots$$

и $U_i = \overline{U}_i + u_i$ получим следующую формулу переноса:

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}, i} = \rho (\overline{U_i \mathcal{P}} - \overline{U}_i \overline{\mathcal{P}}) = + \rho \overline{u_i L_j} \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x_j}.$$

Если снова ввести коэффициент вихревой диффузии

$$\epsilon_{ij}^* = - \overline{u_i L_j},$$

то можно сделать вывод, что в общем случае этот коэффициент должен быть тензором второго ранга.

Для однородной, но неизотропной турбулентности корреляция $\overline{u_i L_j}$ несимметрична относительно i и j . Следовательно, тензор вихревой диффузии ϵ_{ij}^* тоже несимметричен относительно своих индексов. Напомним, что индекс j относится к L_j , а индекс i — к величине u_i . Тензор вихревой диффузии помечен звездочкой, с тем чтобы отличить его от определенного по формуле (5.55) тензора вихревой

диффузии ϵ_{ij} , который входит в уравнение диффузии Фика и является симметричным относительно индексов i и j .

Располагая более или менее формальным выражением $\overline{u_2 L_m}$ или $\overline{u_i L_j}$ для коэффициента вихревой диффузии, мы не сможем довести задачу до конца. Цель, которую поставил перед собой Прандтль, состояла в том, чтобы выразить эти величины через некоторую фундаментальную характеристику основного потока. Однако в трехмерном случае это — не простое дело; при этом мы приходим к очень сложным выражениям. Поэтому Прандтль ограничился рассмотрением плоского потока. Рассуждения, которыми он воспользовался, чтобы получить наиболее приемлемое с практической точки зрения выражение для $\epsilon_m = -\overline{u_2 L_m}$, сводятся примерно к следующему.

Каждый моль жидкости, кроме поперечной компоненты скорости u_2 , имеет еще и компоненту u_1 в осевом направлении. Эти компоненты — одинаковые по порядку величины. Далее, Прандтль полагает, что компонента u_1 скорости моля определяется разностью между значениями средней скорости $\bar{U}_1$ в рассматриваемой плоскости и в плоскости, из которой начинается движение этого моля. Таким образом,

$$u_1 \sim L \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$$

и, следовательно,

$$u_2 \approx u_1 \sim -L \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|,$$

так как знак компоненты u_2 определяется знаком величины L . Отсюда

$$\epsilon_m = -\overline{u_2 L_m} = \text{const } \overline{L_m^2} \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|.$$

Коэффициент пропорциональности для удобства можно включить в новый параметр длины $l_m^2 = \text{const } \overline{L_m^2}$. Тогда выражение для коэффициента вихревой вязкости запишется так:

$$\epsilon_m = l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \quad (5.2)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{12} = \rho l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}. \quad (5.3)$$

Это соотношение можно получить также и другим способом, а именно исходя из выражения

$$\sigma_{12} = -\overline{\rho u_1 u_2}.$$

Введем коэффициент корреляции второго порядка R_{12} между компонентами скорости u_1 и u_2 в одной и той же точке:

$$R_{12}(0) = \frac{\overline{u_1' u_2'}}{\overline{u_1'^2}}.$$

Тогда выражение для σ_{12} запишется в виде

$$\sigma_{12} = -\rho R_{12}(0) \overline{u_1'^2}.$$

Если снова воспользоваться предположением о том, что величины u_1' и u_2' пропорциональны $|d\bar{U}_1/dx_2|$, и если учесть, что σ_{12} и $R_{12}(0)$ имеют противоположные знаки, то мы придем к соотношению (5.3); коэффициенты пропорциональности вводятся при этом в параметр длины l_m .

Эти рассуждения показывают, что в теории Прандтля содержатся предположения о постоянстве коэффициента корреляции между компонентами u_1 и u_2 , а также о постоянстве коэффициента пропорциональности между u_1' и u_2' в поперечном сечении рассматриваемой области течения, если длина l_m принимается в этом сечении неизменной. При рассмотрении свободных турбулентных потоков Прандтль принял, что величина l_m пропорциональна ширине зоны турбулентного смешения и, стало быть, является функцией только осевой координаты и не зависит от поперечных координат (см. также главу 6).

Сила, действующая на единицу объема и равная скорости переноса импульса на единицу объема жидкости под действием турбулентности, определяется по разности напряжений сдвига между двумя соседними плоскостями. Так как поток в направлении оси x_1 является равномерным, то имеем

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{P}}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \frac{d}{dx_2} \left(l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right). \quad (5.4)$$

Если $\mathcal{P}$ представляет собой скалярную величину Γ , то по аналогии с (5.3) можем записать соотношение

$$\mathfrak{S}_\Gamma = + \overline{u_2 L} \rho \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} = - \rho l_\Gamma^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2}. \quad (5.5)$$

При этом выражение для соответствующего коэффициента вихревой диффузии имеет вид

$$\epsilon_\Gamma = l_\Gamma^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|. \quad (5.6)$$

Длина l_Γ , конечно, не обязательно должна быть а priori равна l_m , хотя такое предположение используется довольно часто.

Применение прандтлевской теории переноса импульса к отысканию распределения средней скорости в свободных струях и в следе за цилиндром или сферой привело к удовлетворительному соответствию с экспериментально определенными распределениями скорости (см. главу 6). В указанных случаях величина Γ_m подбиралась таким образом, чтобы расчетное и экспериментальное распределения совпадали в точке, где осредненная скорость составляет половину своего максимального значения в данном поперечном сечении.

Расхождение между расчетным и экспериментальным распределениями скорости оказывается особенно заметным в тех точках, для которых $d\bar{U}_1/dx_2 = 0$. Согласно теории Прандтля, в этих точках $\epsilon_m = 0$; в то же время в действительности этот коэффициент должен иметь конечную величину. Прандтль сам почувствовал это уязвимое место своей теории и предложил [2] следующее, более развернутое выражение для коэффициента вихревой вязкости:

$$\epsilon_m = \Gamma_m^2 \left[\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right)^2 + \Gamma_m'^2 \left(\frac{d^2\bar{U}_1}{dx_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Это нововведение значительно усложняет расчеты. Но оно, очевидно, должно привести к лучшему соответствию с опытом, хотя бы потому, что для стыкования теоретического и экспериментального распределений имеются два параметра: Γ_m и Γ_m' .

Против теории переноса импульса можно высказать еще одно, более принципиальное возражение. В этой теории совершенно не учитывается влияние пульсаций давления на перенос импульса. Как можно показать на основании уравнений движения, перенос импульса может осуществляться за счет одной только разности давлений, даже когда моле жидкости сам по себе не перемещается. Докажем это иным путем. Из-за пульсаций давления, которые происходят в каждой молекуле жидкости на всем пути длиной L , импульс молекулы не будет оставаться постоянным; следовательно, этот импульс не будет сохраняться и, стало быть, не будет удовлетворяться требование, предъявляемое к транспортабельной субстанции в смысле Прандтля.

Согласно одному из законов Томпсона для вихревых движений, завихренность при плоском движении должна оставаться постоянной. Следовательно, в поле плоского потока завихренность ω является транспортабельной субстанцией в смысле Прандтля. Тэйлор [3] на много лет раньше разработал теорию, подобную теории Прандтля, но при этом воспользовался предположением, что завихренность можно рассматривать как транспортабельную субстанцию (теория переноса завихренности Тэйлора).

Если вновь обратиться к плоскому потоку, равномерному в направлении оси x_1 и обладающему скоростью $\bar{U}_1$, так что $\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_1^2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_2^2 = 0$, то можно написать

$$\frac{d\bar{P}}{dx_1} = \frac{d\sigma_{12}}{dx_2} = -\rho \frac{d}{dx_2} \overline{u_1 u_2} = \overline{\rho u_2 \omega_3},$$

где

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Так как завихренность ω_3 считается транспортабельной субстанцией, то отсюда следует, что

$$\overline{u_2 \omega_3} = + \overline{u_2 L_\omega} \frac{d\bar{\Omega}}{dx_2}.$$

Вследствие того, что

$$\bar{\Omega} = - \frac{d\bar{U}_1}{dx_2},$$

получаем

$$\frac{d\bar{P}}{dx_1} = -\rho \overline{u_2 L_\omega} \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx_2^2} = \rho l_\omega^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx_2^2}. \quad (5.7)$$

Если эту формулу сравнить с уравнением (5.4), то можно заметить, что при условии независимости величины l_m от x_2 оба этих выражения идентичны. Согласно Прандтлю, подобное предположение можно принять при рассмотрении свободной турбулентности, когда осредненная скорость направлена вдоль оси x_1 ; следовательно, в этом случае обе изложенные теории приводят к идентичным решениям. Коэффициент 2, который вносит различие между приведенными выше формулами, может быть включен в величину l ; тогда величина l_ω должна равняться $l_m \sqrt{2}$.

Выражение для коэффициента вихревой вязкости записывается в виде

$$\epsilon_m = \epsilon_\omega = \frac{l_\omega^2}{2} \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|. \quad (5.8)$$

Если сравнить выражения (5.2), (5.6) и (5.8) соответственно для ϵ_m , ϵ_γ и ϵ_ω , то можно заметить, что

$$\frac{\epsilon_m}{\epsilon_\gamma} = \frac{l_m^2}{l_\gamma^2}, \quad \frac{\epsilon_m}{\epsilon_\omega} = \frac{2l_m^2}{l_\omega^2} = 1, \quad \frac{\epsilon_\gamma}{\epsilon_\omega} = \frac{2l_\gamma^2}{l_\omega^2}.$$

Если принять $l_\gamma = l_\omega$, то по теории переноса завихренности получится более сильное распространение $\bar{\Gamma}$, нежели $\bar{U}_1$. Но в теории переноса количества движения, если принять в ней $l_\gamma = l_m$, этого не получается.

Если турбулентность носит трехмерный характер, то завихренность больше уже нельзя считать транспортабельной субстанцией в указанном выше смысле. Поскольку реальная турбулентность является трехмерной даже в том случае, когда основное движение представляет собой плоский поток, завихренность молей жидкости непрерывно изменяется из-за того, что вихревые нити при деформации жидких элементов под действием пространственного турбулентного движения удлиняются.

Тэйлор [4], учтя этот эффект, обобщил свою теорию переноса завихренности для плоского течения на случай трехмерного течения (обобщенная теория переноса завихренности), но при этом получились такие выражения, которые практически невозможно использовать. Поэтому, чтобы добиться упрощений, Тэйлору пришлось поступиться точностью теории; ему ничего не оставалось, кроме как принять предположение о том, что в трехмерном потоке завихренность тоже сохраняется неизменной. Эта упрощенная теория известна сейчас как видоизмененная теория переноса завихренности.

Мы дадим здесь вывод дифференциальных уравнений для определения скорости по видоизмененной теории переноса завихренности. Для этого прежде всего необходимо преобразовать уравнения движения таким образом, чтобы выделить в них члены, содержащие завихренность.

Будем считать течение установившимся и пренебрежем влиянием вязкости. Тогда уравнения движения (1.17) запишутся так:

$$\overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}.$$

Преобразуем последний член правой части следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} = \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = -\overline{u_j \omega_k \varepsilon_{ijk}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\overline{u_j u_j}}{2},$$

где (см. § 1.2)

$$\omega_k \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Отсюда

$$\overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\overline{u_j u_j}}{2} + \overline{u_j \omega_k \varepsilon_{ijk}}. \quad (5.9)$$

Согласно теории пути смешения, величина ω_k определяется величиной средней завихренности в том слое жидкости, из которого начинают свое движение моли жидкости. Если при движении моля жидкости завихренность на некотором расстоянии сохраняется постоянной, то можно написать

$$\omega_k = +L_j \frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial x_j},$$

откуда

$$\overline{u_j \omega_k \epsilon_{ijk}} = + \overline{u_j L_l \epsilon_{ijk}} \frac{\partial \bar{\Omega}_k}{\partial x_l}.$$

Если подставить это соотношение в уравнение (5.9), то получим уравнение, которое оказывается весьма сложным для использования в дальнейших расчетах. Поэтому Тэйлор решительно упростил это уравнение, введя предположение о том, что анизотропность турбулентности достаточно мала и, следовательно, характеристики турбулентности $\overline{u_j L_l}$ могут приближенно рассматриваться как изотропные.

В этом случае имеем

$$\overline{u_j L_l} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l \quad (\text{инвариантность при отражении})$$

и

$$\overline{u_j L_l} = (\overline{u L})_\omega = -\epsilon_\omega \quad \text{при} \quad j = l.$$

Стало быть, тогда можно ввести скалярный коэффициент вихревой диффузии; следовательно,

$$\overline{u_j \omega_k \epsilon_{ijk}} = -\epsilon_\omega \epsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{\Omega}_k}{\partial x_j}.$$

Так как

$$\epsilon_{ijk} \bar{\Omega}_k = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j},$$

то для несжимаемой жидкости получаем

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{\Omega}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} = - \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Отсюда

$$\overline{u_j \omega_k \epsilon_{ijk}} = \epsilon_\omega \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Тогда уравнение (5.9) перепишется следующим образом:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\overline{u_j u_j}}{2} + \epsilon_\omega \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (5.10)$$

Согласно теории переноса импульса, должно было бы получиться такое уравнение:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\epsilon_m)_{ik} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Итак, нетрудно видеть, что эти два дифференциальных уравнения становятся идентичными лишь при определенных условиях. Так, рассматриваемая турбулентность должна быть однородной, чтобы вторым членом в правой части уравнения (5.10) можно было пренебречь. Для того чтобы величина $(\epsilon_m)_{ik}$ стала скаляром, который,

помимо всего, не должен зависеть от x_j , необходимо принять предположение о приближенной изотропности величин, характеризующих турбулентный перенос, аналогичное предположению, введенному Тэйлором в уравнении (5.9).

Согласно прандтлевской гипотезе пути смешения, коэффициент вихревой вязкости ϵ_m можно записать в виде произведения квадрата пути смешения и поперечной производной от средней скорости. Как уже упоминалось, Прандтль предположил, что (1) в свободном турбулентном потоке путь смешения постоянен в произвольном поперечном сечении зоны смешения и что (2) путь смешения пропорционален ширине зоны смешения. В этих предположениях подразумевается, что в некотором поперечном сечении зоны смешения масштаб турбулентности, который связан с путем смешения, должен иметь в среднем постоянное значение, определяемое полной шириной зоны смешения.

Карман выдвинул другое предположение относительно величины пути смешения, а именно, что она определяется местными условиями течения и может быть выражена через параметры, которые зависят от этих местных условий. Такими параметрами являются, например, производные от осредненной скорости в некоторой точке поля течения. Кроме того, Карман принял, что картина течения обладает геометрическим подобием по всему полю. Согласно определению подобия (см. § 3.1), для описания структуры турбулентности достаточно лишь масштабов длины и скорости. Поскольку упомянутые производные от осредненной скорости рассматриваются как параметры, определяемые местными условиями, то самый простой способ получения характерного масштаба длины — это выразить его как отношение двух последовательных производных, например первой и второй поперечных производных от средней скорости.

Если обратиться к плоскому течению с осредненной скоростью, направленной вдоль оси x_1 , то условие геометрического подобия требует, таким образом, чтобы

$$\mathfrak{I} \frac{(\partial^2 \bar{U}_1 / \partial x_2^2)}{(\partial \bar{U}_1 / \partial x_2)} = \text{const} = K$$

или

$$\mathfrak{I} = K \frac{(\partial \bar{U}_1 / \partial x_2)}{(\partial^2 \bar{U}_1 / \partial x_2^2)}. \quad (5.12)$$

Тогда для коэффициента вихревой вязкости ϵ_m получим следующее выражение:

$$\epsilon_m = \mathfrak{I}_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| = K^2 \frac{(\partial \bar{U}_1 / \partial x_2)^2}{(\partial^2 \bar{U}_1 / \partial x_2^2)^2} \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|. \quad (5.13)$$

Это выражение показывает, что в тех точках, где $\partial^2 \bar{U}_1 / \partial x_2^2 = 0$ и $\partial \bar{U}_1 / \partial x_2 \neq 0$, величина ϵ_m обращается в бесконечность. Этот результат не является вполне очевидным. Кроме того, оказывается, что теория Кармана не имеет существенных преимуществ перед намного более простым предположением Прандтля о пропорциональности пути смешения ширине зоны смешения (в случае свободной турбулентности) или расстоянию от стенки (в случае «пристеночной» турбулентности; см. главу 7).

Резюмируя, можно сказать, что теории пути смешения основаны главным образом на двух гипотезах, а именно: (1) на аналогии с кинетической теорией газов в сочетании с предположением о том, что либо импульс, либо завихренность является транспортабельной субстанцией жидких частиц, и (2) на гипотезе, согласно которой путь смешения зависит от условий течения.

Ни Прандтль, ни Тэйлор не занимались подробным анализом того механизма, благодаря которому моли жидкости приспособляются присущие им транспортабельные субстанции к своей новой окружающей среде. В данном случае предполагается, что подобное приспособление происходит обязательно. Особенно в случае теории переноса завихренности, где завихренность сохраняется постоянной (плоское течение) или предполагается постоянной (трехмерное течение), очень трудно, не принимая во внимание влияние вязкости, представить себе, каким образом завихренность жидкого моля приспособляется к средней завихренности новой окружающей среды.

Вслед за этими теориями пути смешения были разработаны и другие теории. Карман [6] и Прандтль [2] предложили теории, в которых предполагается некоторое непосредственное соответствие между коэффициентом вихревой диффузии ϵ и картиной течения. В других теориях, которые будут рассмотрены в дальнейшем, не вводится коэффициента вихревой диффузии, а используются совершенно иные рассуждения, основанные на феноменологических представлениях.

Карман высказал сомнение насчет того, можно ли удовлетворительно описать распределение осредненной скорости с помощью теорий пути смешения, если (например, в случае свободной турбулентности) определять путь смешения размерами зоны смешения, как это предлагалось Прандтлем. Карман следует своему прежнему предположению о том, что процессы турбулентного переноса определяются местными условиями течения. Из соображений размерности величину ϵ можно записать как произведение скорости на длину. В качестве этой скорости Карман выбирает u'_2 и получает

$$\epsilon = u'_2 l^*.$$

Длина l^* не идентична прандтлевскому пути смешения. По Карману, величина l^* должна определяться параметрами, носящими мест-

ный характер, такими, как λ_g и локальное число Рейнольдса или число Рейнольдса турбулентности Re_λ . Таким образом,

$$l^* = \lambda_g f(Re_\lambda).$$

Самая простая форма этой зависимости имеет вид

$$l^* \sim \lambda_g Re_\lambda,$$

и, следовательно,

$$\epsilon = \text{const} \frac{u_2'^2 \lambda_g^2}{\nu}. \quad (5.14)$$

В предшествовавшем анализе было выяснено различие между идеями Прандтля и Кармана: Прандтль пытается связывать процессы переноса в зонах смешения свободных турбулентных потоков с суммарными условиями течения; в то же время Карман делает попытку увязать эти процессы с местными условиями. Отмеченное различие вновь проявляется между только что изложенной теорией Кармана и другой теорией Прандтля, относящейся к свободной турбулентности. В этой теории Прандтль исходит из предположения о том, что характер течения в зоне смешения как целого определяется размерами этой зоны и наибольшей разностью скоростей в поперечном сечении этой зоны. Полагая, что коэффициент вихревой диффузии определяется именно этими суммарными величинами, Прандтль предлагает следующую формулу для ϵ :

$$\epsilon = \text{const} B (\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}), \quad (5.15)$$

где B — ширина зоны смешения.

Таким образом, величина ϵ должна быть постоянной (независимой от x_2) в любом поперечном сечении и зависеть только от x_1 , т. е. от направления основного течения. Следствием этого положения является то, что, согласно соотношению (5.2), путь смешения l_m , в противоположность предположению, принятому Прандтлем ранее, непостоянен в поперечном сечении зоны смешения.

Согласно уравнению (5.14), величина ϵ может зависеть также и от x_2 . Как будет показано в главе 6, экспериментальные данные о распределении скорости в поперечных сечениях свободной струи и следа за цилиндром свидетельствуют в пользу предположения о постоянстве величины ϵ_m в поперечном сечении зоны смешения.

Весьма полезным могло бы оказаться более подробное рассмотрение упомянутых здесь различных теорий в свете более поздних исследований по структуре турбулентности, ибо эти исследования ясно показывают недостатки той или иной теории. Однако, поскольку эти исследования относятся, в основном, к свободным турбулентным потокам (свободные струи и аэродинамический след за цилиндром), мы ограничимся здесь лишь анализом именно этого типа

турбулентных течений. При этом нам придется воспользоваться экспериментальными данными, которые будут рассмотрены ниже, в главе 6, но это, по-видимому, не является серьезной помехой.

Прежде всего мы должны подчеркнуть следующее. Во всех рассмотренных выше теориях предполагается, что перенос некоторой транспортабельной субстанции определяется местным градиентом этой субстанции и, следовательно, явление переноса в данном случае относится к градиентному типу и при этом должен быть введен коэффициент вихревой диффузии. Если записать $\epsilon = u'_2 l^*$, то градиентный тип переноса означает тогда, что величина l^* должна быть мала, и во всяком случае настолько, чтобы градиент этой транспортабельной субстанции на всем расстоянии l^* был практически равномерным. Но, исходя из соответствующих значений ϵ и u'_2 в зоне смешения, можно показать, что длина l^* , по-видимому, обычно не очень мала; следовательно, указанное выше условие не удовлетворяется. По измерениям Таунсенда в следе за цилиндром, эмпирическое значение l^* — порядка 0,1 от полуширины следа.

Если в теорию пути смешения Прандтля ввести величины u'_2 и l^* , приняв для ϵ_m , например, выражение (5.2), то и в этом случае путь смешения l_m тоже должен быть мал по сравнению с размерами зоны смешения. Как мы увидим в главе 6, величины l_m , вычисленные по экспериментальным значениям ϵ_m , далеко не малы по сравнению с шириной зоны смешения.

Выше уже говорилось о том, что теория пути смешения Прандтля содержит также предположение о постоянстве отношения величин u'_1 и u'_2 в поперечном сечении зоны смешения; отсюда следует подобие структуры турбулентности во всех участках зоны смешения. Но в той же теории, помимо этого, предполагается, что влияние диффузии и конвекции энергии турбулентности должно быть пренебрежимо малым и, следовательно, локальное порождение энергии турбулентности за счет работы напряжений сдвига равно диссипации [см., например, уравнение (1.99)]. Для этого случая имеем

$$-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = \text{диссипация.}$$

Воспользуемся теперь предположением о подобии и выберем в качестве характерной скорости и длины соответственно величины u'_2 и λ . Тогда

$$\overline{u_1 u_2} \sim u'^2_2$$

и

$$\text{диссипация} \sim \frac{\sqrt{u'^2_2}}{\lambda^2} \sim \frac{1}{\text{Re}_\lambda} \frac{l_m}{\lambda} \frac{u'^3_2}{l_m},$$

так что

$$u_2'^2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\text{Re}_\lambda} \frac{l_m}{\lambda} \frac{u_2'^3}{l_m},$$

откуда

$$u_2' \sim l_m \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Это и есть, по существу, одно из предположений, введенных Прандтлем. Но, как будет показано в главе 6, диффузию и конвекцию энергии турбулентности нельзя всегда считать пренебрежимо малыми.

Экспериментально было обнаружено, что при течении в следе, как и в случае свободной струи, коэффициент вихревой вязкости ϵ_m на большом участке зоны смешения почти постоянен. Если, следуя Карману, считать, что для ϵ_m применима формула (5.14), то это означает, что либо обе величины — $u_2'^2$ и λ_g — постоянны, либо они изменяются, но при этом их произведение остается постоянным. По измерениям Таунсенда в следе за цилиндром, величина λ_g в поперечном сечении следа практически постоянна. Но так как величина u_2' в поперечном сечении следа изменяется, соотношение (5.14) должно приводить к непостоянной величине ϵ_m' .

Однако выбор u_2' в качестве характерной скорости является довольно произвольным. Число Рейнольдса Re_λ , на наш взгляд, лучше относить к среднеквадратичному значению всех трех компонент турбулентных пульсаций и, следовательно, вместо соотношения (5.14) принять

$$\epsilon_m = \text{const} \frac{(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \lambda_g^2}{\nu}. \quad (5.16)$$

По измерениям Таунсенда, энергия турбулентности

$$\frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)$$

в поперечном сечении следа остается почти постоянной.

Постоянство энергии турбулентности и масштаба диссипации в поперечном сечении зоны смешения — экспериментальные факты. Но эти факты можно подтвердить и путем логических рассуждений. Для этого необходимо более подробно рассмотреть процесс переноса энергии турбулентности в зоне смешения. Анализ результатов измерений, касающихся переноса энергии турбулентности и произведенных Таунсендом в следе за цилиндром, будет дан в главе 6. Здесь достаточно упомянуть лишь об одном из результатов этого анализа, а именно о том, что, по-видимому, существует небольшой участок зоны смешения, в котором диффузия энергии турбулент-

ности, если придерживаться предположения о градиентном типе суммарного переноса $\overline{u_2 q^2}$, происходит не в направлении уменьшения градиента, а, наоборот, в сторону его возрастания. В этом случае величина ϵ_q становится на этом участке отрицательной, что невозможно. Единственный способ разрешения этого противоречия заключается в отказе от предположения о градиентном типе суммарного переноса $\overline{u_2 q^2}$ и в допущении того, что наблюдаемый в этом случае перенос определяется механизмом, отличным от диффузии градиентного типа. В отношении этого механизма постулируем, что перенос величины $\overline{q^2}$ осуществляется посредством диффузии градиентного типа, обусловленной мелкомасштабной турбулентностью, в сочетании с конвекцией при крупномасштабных движениях вихрей, сравнимых по своим размерам с шириной следа. Отсюда

$$\overline{u_2 q^2} = -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{q^2} + \overline{\mathcal{V} q^2}, \quad (5.17)$$

где $\mathcal{V}$ означает скорость крупномасштабных движений.

Очевидно, что такой же комплекс механизмов переноса в принципе применим к любой транспортабельной субстанции — импульсу, теплу или веществу. Таунсенд, анализируя результаты измерений распределения температуры $\overline{\theta}$ и величины $\overline{u_2 \theta}$, обнаружил, что полный перенос тепла должен быть обусловлен не только диффузией градиентного типа, но также и обменом при перемещении больших масс жидкости.

Относительная роль каждого из членов правой части записанного выше уравнения в полном переносе может зависеть от характера транспортабельной субстанции $\mathcal{P}$. Из полученных Таунсендом экспериментальных данных о распределениях средней скорости, тепла и энергии турбулентности в следе за цилиндром следует, что перенос осевой компоненты импульса, по всей вероятности, обусловлен главным образом диффузией градиентного типа при мелкомасштабной турбулентности, в то время как перенос энергии турбулентности связан прежде всего с конвективным действием крупномасштабного движения, а перенос тепла, возможно, носит «смешанный» характер. Это различие в самой грубой форме можно выразить следующим образом:

$$\overline{u_2 u_1} \approx -\epsilon_m \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}, \quad (5.18)$$

$$\overline{u_2 q^2} \approx \overline{\mathcal{V} q^2}, \quad (5.19)$$

$$\overline{u_2 \theta} \approx -\epsilon_\theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x} + \overline{\mathcal{V} \theta}. \quad (5.20)$$

Однако такой подход является очень утрированным.

Так как перенос энергии турбулентности $\overline{q^2}$ вызывается, в основном, крупномасштабными конвективными токами поперек зоны смешения, логично воспользоваться экспериментальным результатом, состоящим в том, что распределение $\overline{q^2}$ на довольно протяженном участке зоны смешения практически равномерно.

Прежде чем закончить этот критический обзор теорий переноса, желательно упомянуть об одной характерной особенности свободных турбулентных потоков, которая определенно влияет на результаты игнорирующих ее теорий. Речь идет о перемежающемся характере турбулентного течения в пограничных слоях между зоной смешения и невозмущенным свободным потоком, расположенным снаружи нее.

Описание процессов переноса с помощью дифференциальных уравнений предполагает непрерывность течения во всей рассматриваемой области. Но если обратиться к картине течения в следе или в свободной струе, то подобную непрерывность можно обнаружить только в центральной части зоны смешения; в направлении к наружным границам зоны смешения непрерывность все более и более нарушается. Решения дифференциальных уравнений, основанные на предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, оказываются совершенно непригодными в перемежающихся пограничных участках. В самом деле, эффективная величина рассматриваемого коэффициента на этих участках резко уменьшается с приближением к наружной границе. Это и понятно, поскольку диффузия градиентного типа может существовать в данной точке только в течение тех периодов, когда течение в этой точке является турбулентным. Мгновенное значение ϵ на протяжении этих периодов может быть приблизительно равно значению, наблюдающемуся в непрерывной центральной части зоны смешения; другими словами, величина ϵ на протяжении этих периодов может быть примерно постоянной.

В теориях, разработанных Буссинеском, Прандтлем, Тэйлором и Карманом, используется дедуктивный метод. Принимается определенная гипотеза относительно напряжений сдвига в турбулентном потоке или относительно коэффициента турбулентной диффузии, на основании которой с помощью уравнений движения и неразрывности, а также в предположении об условиях подобия выводится (дедугируется) распределение скорости. Рейхардт [7, 8] подверг критике этот метод, указав, что относительно просто измеряемые величины, например средняя скорость, выводятся в этом случае на основании более или менее сомнительных гипотез и что неизбежный разброс экспериментальных данных, используемых для сравнения, сильно затрудняет принятие решения в пользу той или иной гипотезы.

В противоположность дедуктивному методу, Рейхардт предложил индуктивный метод. Основу его составляют экспериментальные данные о непосредственно измеряемых величинах. Индуктивная теория

была подробно разработана Рейхардтом для случая свободных турбулентных течений. Опыты показали, что распределения скорости и субстанции Γ в поперечных сечениях зоны смешения довольно близко следуют кривой ошибок Гаусса или связанным с ней функциям. Подобные функции были обнаружены также в процессах выравнивания под действием молекулярной диффузии или теплопроводности. Рейхардт предположил, что процесс турбулентного переноса по своей природе является статистическим и в точности аналогичен процессу молекулярного переноса. Если, например, рассматривать распределение скорости U_1 в свободном турбулентном потоке, основная скорость которого направлена вдоль оси x_1 , то оказывается, что распределение полного потока импульса $\rho \overline{U_1^2}$ (включающего в себя осредненную и пульсационную компоненты) хорошо описывается гауссовой кривой ошибок. Но если это так, то дифференциальное уравнение для $\rho \overline{U_1^2}$ должно быть идентично уравнению молекулярной диффузии или теплопроводности. Следовательно, уравнения движения надо преобразовать таким путем, чтобы получить уравнение теплопроводности; для решения же этого уравнения потребуется отдельная гипотеза.

Чисто феноменологическую теорию Рейхардта мы рассмотрим более подробно на примере плоского течения. Если, как это обычно делается при исследовании свободной турбулентности, пренебречь членом, в который входит давление, и членами, содержащими вязкость, то уравнение движения для мгновенной скорости U_1 запишется так:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = 0. \quad (5.21)$$

С помощью уравнения неразрывности преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} U_1 U_2 = 0. \quad (5.22)$$

Но так как осредненное движение считается стационарным, то

$$\frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{U_1 U_2} = 0. \quad (5.22a)$$

Это не что иное, как уравнение сохранения компоненты импульса в направлении оси x_1 .

Если принять, что величина $\overline{U_1^2}$ следует гауссову закону ошибок, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_1} = \mathcal{L} \frac{\partial^2 \overline{U_1^2}}{\partial x_2^2}. \quad (5.23)$$

В этом уравнении величина $\mathcal{L}$ имеет размерность длины, но математически она имеет смысл коэффициента диффузии; какого-либо определенного физического смысла она лишена.

Коэффициент $\mathcal{L}$ может, вообще говоря, зависеть от x_1 и x_2 . Применяя свою теорию к свободным турбулентным потокам, Рейхардт предполагал, что $\mathcal{L}$ является функцией только x_1 , определяемой шириной зоны смешения.

Чтобы преобразовать (5.22) в (5.23), необходимо лишь постулировать, что

$$\overline{U_1 U_2} := -\mathcal{L} \frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_2}. \quad (5.24)$$

Это соотношение, которое Рейхардт называет законом переноса импульса, можно интерпретировать следующим образом. Интенсивность переноса импульса, соответствующего компоненте U_1 , в поперечном направлении со скоростью U_2 пропорциональна изменению потока импульса $\overline{U_1^2}$ в этом поперечном направлении.

Этот «закон» не лишен определенного смысла. Однако он является неудовлетворительным и в самом деле оказывается несправедливым, если рассматривать все вытекающие из него следствия. Как показал Прандтль [2], уравнение (5.23) отдает предпочтение оси x_1 по сравнению с осью x_2 ; это совершенно неоправданно — единственное оправдание состоит в том, что ось x_1 совпадает с направлением осредненного течения.

В то время как уравнение (5.22) инвариантно относительно параллельного переноса координатной системы с постоянной скоростью, этого, по-видимому, нельзя сказать об уравнении переноса импульса (5.24); следовательно, уравнение (5.24) противоречит принципу относительности Ньютона, согласно которому силы, действующие в механической системе, не должны измениться, если этой системе сообщить дополнительную постоянную скорость.

Рассмотрим, кроме системы координат (x_1, x_2) , другую систему (x_1^*, x_2^*) , параллельную первой и движущуюся в направлении оси x_2 с постоянной скоростью C . Пусть U_1^* и U_2^* — компоненты скорости относительно движущейся системы. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^*, & U_1 &= U_1^*, \\ x_2 &= x_2^* + Ct^*, & U_2 &= U_2^* + C. \\ t &= t^*, \end{aligned}$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*}, & \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*} \frac{\partial x_1^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \frac{\partial x_2^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial x_2^*} + \frac{\partial}{\partial t^*}, \end{aligned}$$

то уравнение (5.22) преобразуется так:

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial t} - C \frac{\partial U_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial U_1^{*2}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} U_1^* U_2^* + C \frac{\partial U_1^*}{\partial x_2^*} = 0$$

или

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial t} + \frac{\partial U_1^{*2}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} U_1^* U_2^* = 0.$$

Относительно движущейся системы координат уравнение (5.24) принимает следующий вид:

$$\overline{U_1^* U_2^*} + C \overline{U_1^*} = - \mathcal{L} \frac{\overline{U_1^{*2}}}{\partial x_2^*}.$$

Следовательно, уравнение (5.24) и в самом деле не инвариантно относительно параллельного переноса системы координат.

Изложенные выше соображения говорят не в пользу теории Рейхардта. Единственный, но, по общему признанию, очень сильный аргумент, который приводится Рейхардтом в пользу его теории, — это хорошее согласие с экспериментальными результатами. Но это на самом деле и не очень удивительно, ибо в этой теории уравнения движения искусственно преобразуются с таким расчетом, чтобы соответствовать опытным данным.

В то же время уравнение (5.23) имеет — не только с математической, но и с практической, инженерной точки зрения — то преимущество, что оно является линейным относительно $\overline{U^2}$, а при этом справедлив принцип суперпозиции элементарных решений. Александэр, Бэрон и Камингс [11] показали, что принцип суперпозиции успешно может применяться для расчета распределения импульса в поперечном сечении двух параллельных свободных струй, вытекающих с одинаковой скоростью из щелей, расположенных в одной и той же плоскости, перпендикулярной к осям струй.

Теорию Рейхардта можно обобщить на случай, в котором вместо компоненты импульса ρU_1 рассматривается скалярная субстанция Γ . Для плоского стационарного движения, если пренебречь молекулярными эффектами, уравнение переноса Γ записывается в виде

$$\frac{\partial \overline{U_1 \Gamma}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{U_2 \Gamma} = 0.$$

Теперь необходимо постулировать «закон»

$$\overline{U_2 \Gamma} = - \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{U_1 \Gamma} \quad (5.25)$$

с тем, чтобы прийти к уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \overline{U_1 \Gamma} = \mathcal{L}_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \overline{U_1 \Gamma}, \quad (5.26)$$

которое для $\overline{U_1 \Gamma}$ дает решение типа гауссовой кривой ошибок.

Другая феноменологическая теория, которая оказывается эквивалентной теории Рейхардта, предложена Бэрном [9]. Бэрн показал, что процессы переноса при свободной турбулентности всегда приводят к гауссовым кривым ошибок для распределения транспортабельной субстанции, так как статистические процессы обычно приводят к кривым ошибок Гаусса, а распространение турбулентности — это и есть статистический процесс. Бэрн высказал предположение о том, что турбулентное течение можно получить в результате распространения «импульсных частиц», движение которых начинается из источников.

Рассмотрим для примера свободную струю. Отверстие, из которого вытекает струя, может быть принято за источник подобных импульсных частиц, эжектирующих импульсные частицы вдоль оси струи. При этом могут происходить отклонения или распространение этих частиц в поперечном направлении; указанные отклонения подчиняются законам вероятности. В нашем случае плотность вероятности отклонения импульсных частиц в поперечном направлении описывается гауссовой кривой ошибок. Эти представления сходны с теми, которые применяются при оценке поперечного разброса оружейных снарядов. Благодаря распространению в поперечном направлении, ширина зоны, занимаемой этими импульсными частицами, должна в направлении струи возрастать. Однако эта теория не позволяет оценить, в какой мере происходит указанное увеличение ширины с расстоянием от сопла. Для этого требуется ввести еще одно предположение, например о подобии профилей скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи. В случае струи, вытекающей из отверстия круглой формы, это приводит к линейному закону увеличения ширины струи с расстоянием от отверстия. Результатом теории Бэрна является распределение скорости типа кривой Гаусса. Но если эту гауссову кривую рассматривать как решение дифференциального уравнения (5.23), то те же принципиальные возражения, которые выше были выдвинуты против теории Рейхардта, можно повторить и здесь.

Ни теория Рейхардта, ни теория Бэрна не описывают действительной картины механизма турбулентного течения и даже не делают попытки каким-либо способом углубить наши представления об этом механизме. Единственная заслуга этих теорий, которая носит практический характер и о которой уже упоминалось, состоит в том, что они дают возможность легко строить решения для распределения транспортабельной субстанции в свободном турбулентном

потоке, причем эти решения вполне удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Наконец, можно отметить, что решение типа Гаусса для уравнения (5.23) относится к полному потоку импульса $\overline{U_1^2}$, в который входят компоненты как осредненного, так и пульсационного движения, а именно:

$$\overline{U_1^2} = \overline{U_1^2} + \overline{u_1^2}.$$

То же самое относится и к решениям, полученным в теории Бэрона.

В главе 6 будет показано, что для свободных турбулентных потоков при определенных предположениях представляется возможным получать из уравнений движения решения типа Гаусса, которые в этом случае относятся к осредненной скорости $\overline{U_1}$.

Экспериментальные данные имеют обычно такой разброс, что принять решение о том, какая из величин — полный поток импульса $\overline{U_1^2}$ или осредненная скорость $\overline{U_1}$ — лучше описывается решением типа Гаусса, весьма затруднительно.

Проведенные Таунсендом и Бэтчелором исследования течения в следе за цилиндром показали, что решение типа Гаусса, по-видимому, справедливо для осредненного движения, по крайней мере для центрального, полностью турбулентного участка зоны смешения. Но в пограничном участке зоны смешения это решение неприемлемо. Более подробно результаты этих исследований будут рассмотрены в главе 6.

§ 5.3. Аналогии при турбулентном переносе

При изучении процессов переноса в турбулентных потоках логично задаться вопросом, нельзя ли провести аналогию между процессами переноса таких различных субстанций, как импульс, тепло, вещество и энергия турбулентности. Если бы такая аналогия существовала для любой пары этих субстанций, то для них можно было бы получить подобные решения и даже оказалось бы возможным выразить параметры, определяющие перенос одной субстанции, через параметры, определяющие перенос другой субстанции. По этой причине вопрос о существовании аналогий был поднят очень давно и в существующих теориях получил более или менее удовлетворительное решение.

Если мы хотим разобраться в проблеме аналогий, то необходимо прежде всего четко условиться о том, что же, собственно, подразумевается под понятием аналогии.

Предполагается, что перенос какой-либо транспортабельной субстанции (например, импульса, тепла, вещества, энергии турбулент-

ности) в турбулентном потоке может быть описан посредством дифференциальных уравнений. В этом случае аналогия при переносе выполняется, если соответствующие дифференциальные уравнения, а также начальные и граничные условия идентичны.

В дифференциальные уравнения, описывающие перенос в турбулентном потоке, входят различные члены, представляющие относительный вклад в полное изменение рассматриваемой субстанции следующих факторов: локального изменения по времени; конвекции при осредненном движении; турбулентной и молекулярной диффузии; внешних эффектов и, в случае переноса импульса, осредненного градиента давления.

Удобно, и притом допустимо, различать процессы переноса в широком и узком смысле. Под процессом переноса в широком смысле условимся понимать полностью весь процесс, который вызывает распространение рассматриваемой субстанции в пространстве и определяет его как функцию времени. Это распространение может включать в себя влияние внешних факторов, а также источников и стоков, которое наряду с влиянием потока, как такового, обуславливает изменение этой субстанции. Выделение и поглощение тепла при химической реакции образует соответственно источник и сток, которые не возникают непосредственно в самом потоке. В то же время происхождение тепла, выделяющегося при диссипации кинетической энергии, связано непосредственно с самим потоком; это тепло оказывает воздействие на энергию турбулентности как непрерывно распределенный сток энергии, а на распределение тепла — как непрерывно распределенный источник тепла.

Процесс переноса в узком смысле будем понимать как процесс диффузии собственно рассматриваемой субстанции.

В главе 1, а также в предыдущем параграфе проводилась параллель между процессами турбулентного и молекулярного переноса, причем оба процесса рассматривались тогда в узком смысле. По-видимому, полезно рассмотреть вначале аналогию между процессами молекулярного переноса импульса, тепла и вещества. Как известно, предположение о том, что молекулы ведут себя подобно твердым шарам, приводит к одинаковым значениям коэффициентов кинематической вязкости, теплопроводности и диффузии. Но поскольку необходимы различные поправки, учитывающие влияние упругости шаров, сил отталкивания, постоянства скоростей после столкновений и т. д. — факторов, роль которых неодинакова в случае переноса импульса, тепла (т. е. энергии молекулярного движения) и вещества, то эти три коэффициента оказываются неодинаковыми по величине. Например, влияние постоянства скоростей после столкновений на коэффициент диффузии отлично от влияния этого фактора на коэффициенты вязкости и теплопроводности. Это объясняется тем, что масса не зависит от столкновений, а импульс и энергия зависят от них.

Различия между парами коэффициентов характеризуются их отношением, например числами Прандтля и Шмидта.

При турбулентных движениях, когда большие комплексы молекул движутся более или менее «совокупно», кинетическая энергия, связанная с движениями этих молекул жидкости, не входит во внутреннюю энергию жидкости, т. е. в тепло. Следовательно, логично предположить, что взаимодействие между этими молекулами при турбулентном движении, в отличие от актов обмена молекулярной природы только в течение времени соприкосновения, не влияет ни на количество тепла, ни на массу. Если влиянием этого молекулярного обмена пренебречь, то вихревой обмен теплом и веществом должен быть одинаков. Это подчеркивалось и в приведенных выше рассуждениях, где для обеих этих субстанций применялся один и тот же символ Γ . Столкновение между молекулами жидкости будет оказывать влияние только на их импульс и энергию турбулентности. Следовательно, в процессе турбулентного обмена, при пренебрежении влиянием молекулярного обмена, можно проводить различие между тремя субстанциями: импульсом, теплом (или веществом) и энергией турбулентности.

Однако не всегда допустимо пренебрегать влиянием молекулярного обмена — например, в случае процессов переноса в пограничном слое на твердой стенке. Молекулярными эффектами не всегда можно пренебречь даже при свободной турбулентности. В дальнейшем мы увидим, что турбулентные движения вызывают растяжение и деформацию молекул жидкости, способствуя таким образом увеличению градиентов концентрации и температуры, а стало быть, и молекулярному обмену.

Рассмотрим прежде всего процессы переноса при свободной турбулентности. Несмотря на высказанные выше соображения, будем считать, что процессы переноса в узком смысле являются по своей природе турбулентными и что влиянием молекулярного переноса можно пренебречь. Затем будут рассмотрены аналогии между переносом импульса, тепла (или вещества) и турбулентной энергии в свете теорий, изложенных в предыдущем параграфе.

В случае несжимаемой жидкости изменение скорости описывается уравнением (1.17), которое, если пренебречь вязким членом, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} + \bar{F}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}. \quad (5.27)$$

Здесь величина $\bar{F}_i - (1/\rho)(\partial \bar{P}/\partial x_i)$ представляет собой полную «движущую силу» на единицу массы. Уравнение, описывающее изменение субстанции, согласно (1.28), если вновь пренебречь молекулярными эффектами, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \Gamma} + \bar{F}_\Gamma, \quad (5.28)$$

где $\bar{F}_\Gamma$ означает «движущую силу» для субстанции Γ .

Из уравнения (1.98) для изменения кинетической энергии турбулентности, к которой добавлена величина p/ρ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}} \right) + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}} \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (5.29) \end{aligned}$$

В соответствии с тем, что говорилось выше, мы пренебрегли членом, представляющим работу, совершенную на единицу массы в единицу времени вязкими напряжениями сдвига, но сохранили член, характеризующий диссипацию.

Если сравнить уравнения (5.27) и (5.28), то можно заметить, что, за исключением слагаемого $(1/\rho)(\partial \bar{P}/\partial x_i)$ в уравнении (5.27), члены их подобны. Это различие отражает тот факт, что перенос импульса, в отличие от переноса субстанции Γ , зависит от изменения давления.

Однако в свободных турбулентных потоках градиент давления $\partial \bar{P}/\partial x_i$ обычно настолько мал, что указанным членом можно пренебречь; в этом случае рассматриваемые уравнения оказываются идентичными, если члены $\bar{F}_i$ и $\bar{F}_\gamma$ одинаковы. Можно заметить, что если транспортабельной субстанцией является тепло, то величина $\bar{F}_\gamma$ включает в себя по крайней мере тепло, выделившееся при диссипации кинетической энергии турбулентности.

В уравнении (5.29) два последних члена в правой части, означающих порождение и диссипацию энергии турбулентности, можно рассматривать как характеристику непрерывно распределенного источника и стока. Очевидно, что полная аналогия между переносом энергии турбулентности, с одной стороны, и переносом импульса и тепла, или вещества, с другой стороны, невозможна, так как едва ли можно допустить, что для движущих сил $-\overline{u_i u_j} \partial \bar{U}_i / \partial x_j$, $-\nu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \partial u_j / \partial x_i$ и $\bar{F}_i$ или $\bar{F}_\gamma$ получатся одинаковые функциональные зависимости.

Таким образом, можно сделать вывод, что в свободных турбулентных потоках полная аналогия между переносом (в широком смысле) импульса, тепла (или вещества) и энергии турбулентности невозможна. Только лишь при отсутствии «движущих сил» $\bar{F}_i$ и $\bar{F}_\gamma$ (т. е. при пренебрежении выделением тепла под действием диссипации) возможна аналогия между переносом импульса и тепла (или вещества).

Если перенос рассматривать только в узком смысле, т. е. под воздействием лишь вихревой диффузии, то тогда аналогия между переносом импульса, субстанции Γ и энергии турбулентности может

иметь место при условии, что механизм переноса, которым определяется форма соответствующих членов

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\gamma u_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)},$$

идентичен во всех трех случаях.

Рассмотрим теперь эти три диффузионных члена в свете теорий, изложенных в предыдущем параграфе.

Следуя Буссинеску, введем коэффициенты вихревой диффузии ϵ_m , ϵ_γ и ϵ_q так, чтобы

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= -\epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad \overline{\gamma u_j} = -\epsilon_\gamma \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j}, \\ \overline{u_j \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} &= -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}} \right) = -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\bar{q}^2}{2}. \end{aligned}$$

В случае несжимаемой жидкости и при постоянных значениях коэффициентов вихревой диффузии соответствующие диффузионные члены принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} &= -\epsilon_m \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = -\epsilon_m \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\gamma u_j} &= -\epsilon_\gamma \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial x_j \partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} = -\epsilon_q \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\bar{q}^2}{2}. \end{aligned}$$

Итак, можно сделать вывод, что налицо полная аналогия. Значения ϵ_m , ϵ_γ и ϵ_q могут, конечно, быть отличны друг от друга, что будет проявляться в количественном различии скоростей переноса импульса, субстанции Γ и энергии турбулентности. При этом можно ввести вихревое число Прандтля, вихревое число Шмидта и аналогичный критерий для соотношения ϵ_m/ϵ_q .

Если обратиться к теориям пути смешения Прандтля и Тэйлора, то плоское и трехмерное течения придется рассмотреть отдельно.

В случае плоского потока оказывается, что по прандтлевской теории переноса импульса и тэйлоровской теории переноса завихренности полная аналогия существует [см., например, уравнения (5.6) и (5.8)], если различные пути смешения не зависят от поперечной координаты x_2 , исключая количественные отличия, связанные с неодинаковыми значениями путей смешения l_m или l_ω , l_γ и l_q .

В трехмерном случае члены, характеризующие вихревую диффузию при переносе импульса, субстанции Γ и энергии турбулентности, по прандтлевской теории переноса импульса являются идентичными. Но согласно видоизмененной теории переноса завихренности Тэйлора это не так. Это легко можно показать на примере

осесимметричного течения. В этом случае диффузионный член (см. § 6.7) имеет вид

$$\frac{1}{r} \left(r^2 \left| \frac{d\bar{U}_x}{dr} \right| \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{U}_x}{dr} \right) \right),$$

в то время как диффузионные члены для субстанции Γ и энергии турбулентности записываются как

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r l_\Gamma^2 \left| \frac{d\bar{U}_x}{dr} \right| \frac{d\bar{\Gamma}}{dr} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r l_q^2 \left| \frac{d\bar{U}_x}{dr} \right| \frac{d}{dr} \frac{\bar{q}^2}{2} \right).$$

Таким образом, по видоизмененной теории переноса завихренности Тэйлора между переносом (в узком смысле) импульса, с одной стороны, и переносом субстанции Γ или энергии турбулентности — с другой, аналогия не имеет места; но между переносом субстанции Γ и энергии турбулентности она существует.

Опыты, касающиеся распределения скорости, субстанции Γ и энергии турбулентности в свободных струях и в следе (см. главу 6), показали, что аналогии, вытекающие из теорий переноса импульса Буссинеска и Прандтля, согласуются с экспериментальными данными только в непрерывных и полностью турбулентных зонах, и то лишь приближенно. В случае переноса энергии турбулентности это согласие носит весьма приближенный характер. Согласно двум этим теориям, отношения $\epsilon_\Gamma/\epsilon_m$ и ϵ_q/ϵ_m должны быть постоянными. Однако эмпирическое значение $\epsilon_\Gamma/\epsilon_m$ сохраняется постоянным только в первом приближении, а отношение ϵ_q/ϵ_m , по-видимому, вообще не является постоянным¹⁾.

Если более тщательно рассмотреть механизм переноса при свободной турбулентности и особенно такие факторы, как диффузия градиентного типа и конвективный перенос под действием крупномасштабной турбулентности, то аналогии между процессами переноса (в узком смысле) импульса, субстанции Γ и энергии турбулентности уже не обнаружится. Это ясно подтверждается соответствующими выражениями (5.18), (5.19) и (5.20) для этих трех величин.

Как уже указывалось, пренебрежение влиянием молекулярного обмена на процессы переноса в пограничном слое на твердой стенке является неоправданным. Влияние молекулярных эффектов на перенос тепла и на перенос вещества различно. По этой причине эти процессы нельзя рассматривать как идентичные, даже в том случае, когда механизм переноса этих двух величин примерно одинаков. Отмеченные различия могут стать особенно значительными в непосредственной близости от стенки, где течение является почти вязким.

¹⁾ Эти результаты не изменятся, если попытаться учесть перемежающийся характер турбулентности в струе или следе с помощью некоторого коэффициента перемежаемости.

Сравним сначала перенос тепла с переносом импульса. Для анализа переноса в широком смысле используем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \quad (5.30)$$

и

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = f_\theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} + F_\theta. \quad (5.31)$$

«Движущая сила» F_θ включает в себя тепло, выделяемое при диссипации. Кроме того, здесь введено обозначение $f_\theta = K/\rho c_p$, где K — коэффициент теплопроводности.

Аналогия в широком смысле существует в том случае, если при $U_i = \alpha \Theta$, где α — коэффициент пропорциональности, уравнения (5.30) и (5.31) становятся идентичными. Но эти уравнения идентичны, если выполняются условия

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i = \alpha F_\theta$$

и

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{f_\theta} = 1.$$

В общем случае этим условиям удовлетворить невозможно. Так как содержащий давление член $(1/\rho)(\partial P/\partial x_i)$ не может уравниваться одной лишь диссипацией, то аналогия возможна только в том случае, когда в величину F_θ включены также источники или стоки тепла, распределенные по всему полю течения таким образом, чтобы удовлетворялось первое условие. Но ввиду того, что давление P пульсирует, величина F_θ тоже должна иметь пульсационный характер.

Коэффициент пропорциональности α зависит от типа течения. Для течения в трубе величину α можно получить из условия, что разность между средней температурой жидкости и средней температурой стенки пропорциональна средней скорости движения жидкости по трубе с тем же коэффициентом пропорциональности. Таким образом,

$$\bar{U}_{\text{ср}} = \alpha (\bar{\Theta}_{\text{ср}} - \bar{\Theta}_w),$$

откуда и получается величина α .

Тогда аналогия между переносом тепла и импульса при течении в трубе будет наблюдаться в том случае, когда

$$F_\theta = -\frac{\bar{\Theta}_{\text{ср}} - \bar{\Theta}_w}{\bar{U}_{\text{ср}}} \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

так как $F_i = 0$. Это означает, что в поле течения должны существовать тепловые источники и стоки, величина и распределение которых определяются градиентом $\partial P/\partial x_i$. Впервые на этот факт обратил внимание Прандтль [14].

В пограничном слое на плоской пластине средний градиент давления равен нулю, если невозмущенный поток снаружи пограничного слоя обладает постоянной скоростью. Шульц [10] пришел к выводу о том, что в этом случае возможна полная аналогия, если $Pr = 1$. Однако для этого необходимо, чтобы диссипация отсутствовала, а величина F_θ была точно равна пульсационной составляющей градиента $\partial P / \partial x_i$. Если в то же время рассматривать аналогию применительно к осредненным по времени величинам, то она оказывается возможной только в том случае, когда турбулентный перенос импульса и перенос тепла в узком смысле оказываются идентичными ($Pr_{\text{турб}} = \epsilon_m / \epsilon_0 = 1$) и когда диссипацией можно пренебречь. В этом случае для полной аналогии каких-либо источников тепла не требуется.

Перенос вещества описывается уравнением, подобным уравнению (5.31). При постоянной плотности ρ и постоянном коэффициенте молекулярной диффузии $f_c = D$ (или, более точно, при постоянной величине ρD) это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j} + F_c, \quad (5.32)$$

где C — концентрация на единицу массы. Источником «движущей силы» F_c может явиться, например, химическая реакция.

Если сравнить уравнения (5.31) и (5.32), то обнаружится, что полная аналогия между переносом тепла и вещества в широком смысле существует только в том случае, когда «движущие силы» F_θ (включая выделение тепла за счет диссипации и химических реакций) и F_c пренебрежимо малы. Тогда все положения, доказанные в отношении аналогии между переносом тепла и импульса, справедливы и применительно к аналогии между переносом вещества и импульса.

Однако мы не учли еще граничных условий на стенке. Для идеальной аналогии между различными процессами переноса в пограничном слое необходимо также, чтобы граничные условия на стенке были идентичны. Если рассматривать перенос вещества в сравнении с переносом тепла, то граничные условия можно считать идентичными только в том случае, когда парциальное давление диффундирующего вещества очень мало. Пусть, например, происходит испарение жидкости с поверхности в газ, движущийся вдоль этой поверхности. Перенос пара под действием молекулярной диффузии запишется с помощью уравнения

$$\mathfrak{J}_{\text{пар}} = -\rho D_{\text{пар}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

где $C_{\text{пар}}$ — концентрация пара, $D_{\text{пар}}$ — коэффициент молекулярной диффузии, а ρ — плотность смеси пара с газом. Для переноса газа под

действием молекулярной диффузии имеем аналогичное соотношение:

$$\mathfrak{J}_{\text{газ}} = -\rho D_{\text{газ}} \frac{\partial C_{\text{газ}}}{\partial x_2} = \rho D_{\text{газ}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

так как в бинарной системе $C_{\text{газ}} + C_{\text{пар}} = 1$. Поскольку, кроме того, для бинарной системы справедливо равенство $D_{\text{газ}} = D_{\text{пар}}$, то оба коэффициента диффузии можно для краткости заменить единым символом D .

Итак, вблизи стенки должен происходить перенос газа $\mathfrak{J}_{\text{газ}}$ благодаря молекулярной диффузии. Если стенка не является пористой и, следовательно, газ не может проникать через нее, то перенос газа на стенке должен отсутствовать. Это требует существования конвективного переноса токами, перпендикулярными к стенке, который как раз и компенсировал бы перенос газа под действием молекулярной диффузии. Следовательно, полный перенос газа на стенке представится уравнением

$$\rho D \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} + \rho C_{\text{газ}} U_2 = 0.$$

Отсюда получаем соотношение для конвективного тока

$$U_2 = -\frac{D}{C_{\text{газ}}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}.$$

Этот ток U_2 также вызывает конвективный перенос пара; поэтому полный перенос пара представится в виде

$$-\rho D \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} + \rho C_{\text{пар}} U_2 = -\rho D \left(1 + \frac{C_{\text{пар}}}{C_{\text{газ}}}\right) \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}.$$

Концентрации $C_{\text{пар}}$ и $C_{\text{газ}}$ можно выразить соответственно через парциальные давления $P_{\text{пар}}$ и $P_{\text{газ}} = P - P_{\text{пар}}$, пользуясь для этого уравнением состояния

$$C_{\text{газ}} = \frac{M_{\text{пар}}}{\rho \mathfrak{R} \Theta} P_{\text{пар}}, \quad C_{\text{газ}} = \frac{M_{\text{газ}}}{\rho \mathfrak{R} \Theta} P_{\text{газ}},$$

где $M_{\text{пар}}$ и $M_{\text{газ}}$ — молекулярные веса пара и газа, а $\mathfrak{R}$ — абсолютная газовая постоянная. Тогда выражение для полного переноса пара преобразуется следующим образом:

$$\text{перенос пара} = -\rho D \left(1 + \frac{M_{\text{пар}}}{M_{\text{газ}}} \frac{P_{\text{пар}}}{P - P_{\text{пар}}}\right) \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}. \quad (5.33)$$

Если парциальное давление пара становится весьма значительным, то второй член в правой части уравнения (5.33) также приобретает важное значение и пренебрегать им уже нельзя.

С точки зрения этого различия между процессами переноса тепла и вещества идеальная аналогия между ними невозможна.

Величину $\partial C_{\text{пар}}/\partial x_2$ с помощью приведенного выше уравнения состояния можно также выразить через $\partial P_{\text{пар}}/\partial x_2$. При дифференцировании следует помнить, что $\rho \Re \Theta = M_{\text{пар}} P_{\text{пар}} + M_{\text{газ}} (P - P_{\text{пар}})$, так что плотность ρ зависит, следовательно, от x_2 . Итак, получаем соотношение

$$\frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} = \frac{M_{\text{газ}} M_{\text{пар}} P}{(\rho \Re \Theta)^2} \frac{\partial P_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

подстановка которого в (5.33) дает

$$\text{перенос пара} = - \frac{D M_{\text{пар}}}{\rho \Re \Theta} \frac{P}{P - P_{\text{пар}}} \frac{\partial P_{\text{пар}}}{\partial x_2}. \quad (5.33a)$$

В заключение можно отметить, что, поскольку в пограничном слое парциальное давление $P_{\text{пар}}$ зависит от x_2 , величина ρD уже не сохраняется строго постоянной и, следовательно, дифференциальное уравнение (5.32) не является точным.

Влияние большого парциального давления на явления вблизи поверхности стенки впервые было подмечено, вероятно, Нуссельтом [12]. Эккерт и Либлайн [13] произвели приближенный расчет испарения при переносе в ламинарном пограничном слое с учетом этого влияния; вслед за их работой появились более точные расчеты, выполненные Шу [63], Сполдингом [62], а также Микли, Россом и Сквайерсом [64].

§ 5.4. Диффузия при однородной турбулентности

В теориях пути смешения рассматривается перенос транспортабельной субстанции молями жидкости, пересекающими некоторую контрольную плоскость в турбулентном потоке. Скорость переноса через такую плоскость, перпендикулярную к оси x_2 , при обмене импульсом и скалярной субстанцией определяется соответственно величинами одноточечных эйлеровых корреляций $\overline{u_1 u_2}$ и $\overline{u_2 \gamma}$. Скорость переноса обычно принято выражать через коэффициент вихревой диффузии и локальный градиент рассматриваемой субстанции, причем коэффициент вихревой диффузии можно считать равным произведению пути смешения и локального градиента осредненной скорости. Например [см. уравнения (5.5) и (5.6)],

$$\epsilon_{\gamma} = - \overline{u_2 L_{\gamma}} = u_2' l_{\gamma}^* = l_{\gamma}^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|.$$

Моли жидкости, которые пересекают контрольную плоскость, переносят транспортабельную субстанцию на расстояние L_{γ} , на котором эта субстанция, по предположению, сохраняется неизменной.

Движение молей на расстоянии L_{γ} можно проанализировать более подробно, применяя тэйлоровскую теорию диффузии жидких частиц,

изложенную в § 1.9. Тогда оказывается возможным найти связь между путем смещения l_γ и лагранжевым интегральным масштабом $(\Lambda_L)_\gamma$, ибо, согласно результатам § 1.9, имеем

$$\epsilon_\gamma = u_2'^2 \int_0^\infty f(\alpha\tau) R_L(\tau) d\tau = u_2'(\Lambda_L)_\gamma.$$

Из сравнения этого выражения для ϵ_γ с предыдущим вытекает, что $l_\gamma^* = (\Lambda_L)_\gamma$ и что величина l_γ — такого же порядка, как и $(\Lambda_L)_\gamma$.

Кроме того, имеем еще одно соотношение:

$$\overline{u_2\gamma} = u_2'\gamma' R_{2,\gamma}(0) = -\epsilon_\gamma \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2},$$

откуда следует формальная связь между коэффициентом эйлеровой одноточечной корреляции $R_{2,\gamma}(0)$ и коэффициентом лагранжевой корреляции $R_L(\tau)$:

$$R_{2,\gamma}(0) = \frac{u_2'}{\gamma'} \frac{d\Gamma'}{dx_2} \int_0^\infty f(\alpha, \tau) R_L(\tau) d\tau. \quad (5.34)$$

Теперь можно установить связь между теорией пути смещения и теорией Тэйлора. Для этого рассмотрим контрольную плоскость, проходящую через точку x_2 и перпендикулярную к оси x_2 . Предположим, что жидкие частицы передвигаются в направлении оси x_2 , перенося вместе с собой субстанцию Γ . Они обуславливают перенос этой субстанции через контрольную плоскость, определяемый формулой

$$\overline{v_2\gamma}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(t_0, t) v_2(t_0) dt_0,$$

где t_0 — момент времени, в который жидкая частица проходит через нашу плоскость в точке x_2 , а t — время движения частицы, т. е. время диффузии. Согласно теории пути смещения, эта жидкая частица переносит субстанцию из некоторой точки, удаленной от точки x_2 нашей плоскости на расстояние y_2 . Предполагая линейную зависимость $\bar{\Gamma}$ от x_2 , согласно этой теории имеем

$$\gamma(t_0, t) = -y_2(t_0, t) \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2}.$$

Но так как

$$v_2(t_0) = \frac{d}{dt} y_2(t_0, t),$$

то получаем

$$\overline{v_2 \gamma} = - \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \frac{1}{T} \int_0^T y_2(t_0, t) \frac{d}{dt} y_2(t_0, t) dt_0 = - \frac{d\bar{\Gamma}}{dx} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_2^2}(t).$$

Если снова положить, что по определению,

$$\overline{v_2 \gamma} = - \epsilon_\gamma \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2},$$

то будем иметь

$$\epsilon_\gamma(t) = \epsilon(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_2^2}(t) = \overline{y_2(t) v_2(t)}. \quad (5.35)$$

Отсюда, используя выражение (1.76) для $\overline{y_2^2}(t)$, получаем

$$\epsilon_\gamma(t) = \epsilon(t) = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau. \quad (5.36)$$

Выражения (5.35) и (5.36) показывают, что при непродолжительном времени диффузии коэффициент диффузии еще зависит от времени. Но в теории пути смещения нам приходится иметь дело с продолжительным временем диффузии жидких частиц, и тогда соотношение (5.36) упрощается:

$$[\epsilon_\gamma]_{t=\infty} = \epsilon = \overline{v_2^2} \int_0^\infty R_L(\tau) d\tau = v_2' \Lambda_L. \quad (1.82)$$

Здесь для коэффициента диффузии ϵ_γ мы получили такую же величину, как и для жидкой частицы ϵ , так как каких-либо потерь субстанции Γ при движении жидкой частицы на расстоянии y_2 не учитывалось*). В действительности величины $(\Lambda_L)_\gamma$ и I_γ для различных транспортабельных субстанций неодинаковы. Они зависят от той скорости, с которой жидкие частицы теряют транспортабельную субстанцию на своем пути, иначе говоря, от скорости, которая определяется степенью взаимодействия жидких частиц с окружающей их средой.

Бюргерс [15] сделал попытку оценить влияние этого обмена с окружающей средой в случае настолько малых жидких частиц, что можно использовать линейное соотношение для скорости обмена, т. е.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \alpha (\bar{\Gamma} - \Gamma), \quad (5.37)$$

*) Следует заметить, что коэффициент диффузии для жидкой частицы относится к величине, определяемой диффузией только под действием турбулентных движений, независимо от влияния молекулярной диффузии.

где $\bar{\Gamma}$ — среднее значение Γ в среде, непосредственно окружающей рассматриваемую частицу. Величина $\bar{\Gamma}$ считается равной среднему значению Γ во всем слое жидкости, пересекаемом жидкой частицей, и поэтому — известной функцией от x_2 . Кроме того, коэффициент обмена α принимается постоянным.

При движении жидкой частицы ее координата y_2 изменяется по времени; следовательно, по отношению к самой частице величина $\bar{\Gamma}$ является функцией времени.

Общее решение уравнения (5.37), конечное при $t \geq 0$, записывается в виде

$$\Gamma = \alpha \int_0^t \bar{\Gamma}(t') \exp[-\alpha(t-t')] dt' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

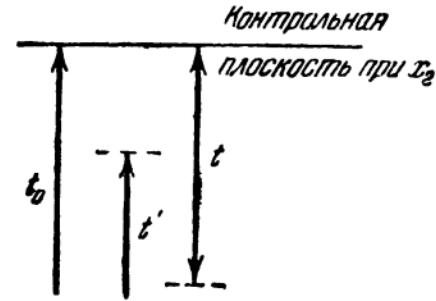


Рис. 5.1. Временные координаты жидкой частицы, проходящей контрольную плоскость в момент времени t_0 и движущейся в течение промежутка времени t .

Рассмотрим жидкую частицу, которая проходит через нашу плоскость в точке x_2 в момент времени t_0 (см. рис. 5.1). Прежде чем достичь этой плоскости в точке x_2 , она уже двигалась в течение

времени t . Тогда для этой частицы в момент времени t_0 имеем

$$\Gamma(t_0, t) = \alpha \int_{t_0-t}^{t_0} \bar{\Gamma}(t') \exp[-\alpha(t_0-t')] dt' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Предположим вновь, что

$$\bar{\Gamma}(t') = \bar{\Gamma}(x_2) - \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t'}^{t_0} v_2(t'') dt'';$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0, t) &= \alpha \int_{t_0-t}^{t_0} \bar{\Gamma}(x_2) \exp[-\alpha(t_0-t')] dt' - \\ &- \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t_0-t}^{t_0} \exp[\alpha(t_0-t')] dt' \int_{t'}^{t_0} v_2(t'') dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t) = \\ &= \bar{\Gamma}(x_2) [1 - \exp(-\alpha t)] - \\ &- \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t_0-t}^t \exp[-\alpha(t_0-t')] dt' \int_{t'}^{t_0} v_2(t'') dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t). \end{aligned}$$

Пусть $t' = t_0 - \tau$. Тогда получим

$$\Gamma(t_0, t) = \bar{\Gamma}(x_2) [1 - \exp(-\alpha t)] - \\ - \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau) d\tau \int_{t_0-\tau}^{t_0} v_2(t'') dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Таким образом, перенос через нашу плоскость в точке x_2 на единицу площади в единицу времени запишется в виде

$$\frac{\mathfrak{J}_t}{\rho} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(t_0, t) v_2(t_0) dt_0 = \\ = -\alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau) d\tau \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 \int_{t_0-\tau}^{t_0} v_2(t_0) v_2(t'') dt'' + \\ + \exp(-\alpha t) \bar{\Gamma}_0 \overline{v_2} = \\ = -\alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau) d\tau \int_0^\tau \overline{v_2(t_0) v_2(t_0 - t''')} dt''' + \exp(-\alpha t) \bar{\Gamma}_0 \overline{v_2},$$

где $t''' = t_0 - t''$.

Введя коэффициент лагранжевой корреляции $R_L(t''')$ и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\mathfrak{J}_t}{\rho} = -\frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \overline{v_2^2} \left[\int_0^t R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau) d\tau - \exp(-\alpha t) \int_0^t R_L(\tau) d\tau \right] + \\ + \exp(-\alpha t) \bar{\Gamma}_0 \overline{v_2}.$$

Последний член в правой части этого соотношения содержит неизвестную корреляцию $\bar{\Gamma}_0 \overline{v_2}$ между значением Γ для жидких частиц при $t=0$ и их скоростью $v_2(t_0)$ в момент прохождения плоскости в точке x_2 . Избавиться от этого члена можно либо предполагая промежуток времени t настолько большим, что эта корреляция $\bar{\Gamma}_0 \overline{v_2}(t_0) \approx 0$, либо считая величину αt настолько большой, что $\exp(-\alpha t) \approx 0$.

Мы воспользуемся здесь последним предположением. Тогда можно заметить, что это предположение сразу подтверждается, если коэффициент обмена α очень велик, и в этом случае время t не обязательно должно быть большим.

Отсюда при $\alpha t \gg 1$, когда, стало быть, $\exp(-\alpha t) \approx 0$, имеем

$$\mathfrak{J}_t = -\rho \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\epsilon_{\gamma} = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau) d\tau. \quad (5.38)$$

Если α не очень велико, то условие $\alpha t \gg 1$ выполняется только для больших t , и в этом случае можем принять

$$\epsilon_{\gamma} = \overline{v_2^2} \int_0^{\infty} R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau) d\tau, \quad (5.39)$$

откуда

$$(\Lambda_L)_{\gamma} = \overline{v_2'} \int_0^{\infty} R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau) d\tau. \quad (5.40)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ выражения (5.39) и (5.40) переходят соответственно в (1.81) и (1.83).

Следует подчеркнуть, что соотношение (5.39) основано на предположении о линейной зависимости $\bar{\Gamma}$ от x_2 на расстояниях, сравнимых с лагранжевым интегральным масштабом.

Основываясь на формуле (5.38), можно сделать вывод, что если коэффициент обмена α очень велик, то $\exp(-\alpha\tau) \approx 0$ даже при умеренных значениях τ . В этом случае лагранжев коэффициент $R_L(\tau)$ может отличаться от $R_L(0) = 1$ лишь на весьма малую величину. В предельном случае имеем

$$\epsilon_{\gamma} \approx \overline{v_2^2} R_L(0) \int_0^{\infty} \exp(-\alpha\tau) d\tau \approx \frac{\overline{v_2^2}}{\alpha}.$$

Следовательно, в величину коэффициента вихревой диффузии входят составляющие от всех частот турбулентных пульсаций. Конечно, это нелегко показать, если ввести лагранжеву функцию энергетического спектра $E_L(n)$:

$$R_L(\tau) = \frac{1}{\overline{v_2^2}} \int_0^{\infty} E_L(n) \cos 2\pi n\tau dn. \quad (5.41)$$

Подставляя это выражение для $R_L(\tau)$ в (5.38), выполняя интегрирование по t и принимая во внимание, что $\exp(-\alpha t) \approx 0$, получаем

$$\epsilon_{\gamma} = \int_0^{\infty} E_L(n) \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 n^2} dn. \quad (5.42)$$

Этот результат, действительно, показывает, что при очень больших α

$$\epsilon_{\gamma} \approx \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} E_L(n) dn = \frac{\overline{v_2^2}}{\alpha}$$

и, стало быть, налицо составляющие от всех частот.

Предположим теперь, что величина α очень мала. Это означает, что нам придется рассматривать очень большое время диффузии. Пусть $2\pi n/\alpha = \beta$. Тогда из (5.42) получим

$$\epsilon_{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_L\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right) \frac{1}{1+\beta^2} d\beta.$$

При больших β сомножитель $(1+\beta^2)^{-1}$ очень мал. Таким образом, следует ожидать, что величина интеграла определяется главным образом составляющими от умеренных значений β . Но при $\alpha \rightarrow 0$ умеренные значения β получаются только в том случае, когда величина n мала, следовательно, мала и величина $\alpha\beta/2\pi$.

Таким образом, в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ можно принять, что

$$\epsilon_{\gamma} \approx E_L(0) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\beta^2} d\beta = \frac{1}{4} E_L(0).$$

Этот результат показывает, что при большом времени диффузии величину коэффициента вихревой диффузии определяют составляющие только от низких частот.

Если выражение (5.39) для ϵ_{γ} , которое основано на линейной зависимости для скорости обмена (5.37), сравнить с более общим выражением

$$\epsilon_{\gamma} = u_2'^2 \int_0^{\infty} f(\alpha, \tau) R_L(\tau) d\tau,$$

то отсюда, как нетрудно видеть, получится $f(\alpha, \tau) = \exp(-\alpha\tau)$. Логично ожидать, что линейная зависимость для скорости обмена будет иметь место в том случае, когда обмен с окружающей средой является по своей природе молекулярным. А это, в свою очередь, означает, что рассматриваемые жидкие частицы должны быть достаточно малы.

Итак, в теориях пути смешения приходится иметь дело с молями жидкости, сравнимыми по своим размерам с путем смешения, а следовательно, и с величиной $(\Lambda_L)_{\gamma}$. В таком случае логичнее ожидать, что обмен между движущимися молями жидкости и окружающей их средой носит нелинейный характер, так как сильное влияние на этот обмен оказывают мелкомасштабные турбулентные движения. И в самом деле, прандтлевская оценка размера молей жидкости, через посредство

которых и осуществляются процессы переноса, основывается на предположении о том, что перенос импульса при столкновениях молей жидкости с окружающей их средой следует квадратичной зависимости.

Взаимодействие моля жидкости с его окружением вызывает сильную деформацию моля. Но, по хорошо известной теореме механики, движение системы частиц может быть разложено на движение центра тяжести этой системы и движение отдельных частиц относительно этого центра тяжести. Может оказаться полезным применить эту теорему и к изучению движения моля жидкости в турбулентном потоке путем рассмотрения этого моля как большого числа жидких частиц. Тогда можно раздельно изучать движение центра массы моля жидкости и движение жидких частиц этого моля относительно центра массы. Относительное движение жидких частиц определяет деформацию и изменение формы моля, а также взаимодействие и обмен транспортабельной субстанции с окружающей средой. Как показал Бэтчелор [16, 17], изучение движения центра массы сводится к анализу диффузии отдельной меченой жидкой частицы методом Эйлера. Для изучения относительных движений жидких частиц достаточно обратиться к лагранжеву методу анализа относительного движения двух меченых жидких частиц. Движение центра массы группы жидких частиц и осредненная концентрация жидких частиц не зависят от исходной формы моля жидкости. Они определяются только диффузией отдельных жидких частиц, диффузия которых не зависит от диффузии других частиц.

Из формулы (1.82) следует, что при продолжительных периодах диффузия меченой жидкой частицы определяется лагранжевым интегральным масштабом Λ_L . Тогда интуитивно можно прийти к заключению, что диффузия при продолжительных периодах определяется крупномасштабными движениями с медленными пульсациями. Эта мысль находит сильную поддержку со стороны полученного ранее результата, который состоит в том, что в случае малой скорости обмена с окружающей средой коэффициент диффузии для большого времени диффузии определяется главным образом движениями с низкой частотой.

Обратимся теперь к анализу влияния различных частот турбулентного движения жидкой частицы на ее диффузию. Для этой цели подставим соотношение (5.41) между $R_L(\tau)$ и $E_L(n)$ в уравнение (1.77):

$$\begin{aligned} \overline{y_2^2} &= 2 \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty E_L(n) dn \int_0^t (t - \tau) \cos 2\pi n\tau d\tau = \\ &= 2 \int_0^\infty E_L(n) \frac{1 - \cos 2\pi nt}{4\pi^2 n^2} dn. \quad (5.43) \end{aligned}$$

Для малых значений t получим

$$\overline{y_2^2} \approx t^2 \int_0^\infty E_L(n) dn.$$

Отсюда следует, что при малом времени диффузии в величину $\overline{y_2^2}$ входят составляющие от всех частот движения жидкой частицы.

Для больших значений t перепишем выражение для $\overline{y_2^2}$ следующим образом [17]:

$$\overline{y_2^2} = \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} E_L\left(\frac{\theta}{2\pi t}\right) d\theta,$$

где $\theta = 2\pi n t$.

Величина $(1 - \cos \theta)/\theta^2$ при больших значениях θ очень мала. Следовательно, величина интеграла определяется в основном только теми значениями подынтегрального выражения, которые соответствуют умеренным значениям θ . Стало быть, можно положить $E_L(\theta/2\pi t) \approx E_L(0)$, что позволяет получить следующее соотношение:

$$\overline{y_2^2} \approx \frac{t}{\pi} E_L(0) \int_0^\infty \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} d\theta = \frac{t}{2} E_L(0) = 2\overline{v_2^2} \mathcal{J}_L t,$$

поскольку из преобразования Фурье от (5.41) следует, что

$$E_L(0) = 4\overline{v_2^2} \int_0^\infty R_L(\tau) d\tau = 4\overline{v_2^2} \mathcal{J}_L.$$

Полученный выше результат в точности совпадает с выражением, которое определяется уравнением (1.80); однако мы показали здесь, что существенный вклад в величину $\overline{y_2^2}$ вносят лишь низкочастотные компоненты движения.

Таким образом, при больших t диффузия отдельной жидкой частицы и, следовательно, центра массы моля жидкости определяется главным образом крупномасштабными турбулентными движениями, а для изучения распространения и распределения меченых жидких частиц в пространстве, по-видимому, наиболее подходящим является метод Эйлера, при котором вводится коэффициент диффузии $\epsilon = \overline{y_2^2}/2t = \overline{v^2} \mathcal{J}_L$. В самом деле, например, в теориях пути смешения метод решения задачи является эйлеровским. Однако следует еще раз подчеркнуть, что при использовании здесь метода Эйлера необходимо лагранжево описание движения отдельной жидкой частицы.

До сих пор мы рассматривали диффузию жидких частиц только в одном направлении, а именно в направлении оси x_2 . Обобщение на случай диффузии жидких частиц в трехмерном пространстве может быть получено посредством рассмотрения вместо y_2^2 «диффузионного» тензора $\overline{y_i y_j}$ (Бэтчелор [16, 17]). При однородной турбулентности этот диффузионный тензор зависит только от времени t . Его можно выразить через коэффициент тензора лагранжевой корреляции скорости

$$[R_{i,j}(\tau)]_L = \frac{\overline{v_i(t) v_j(t+\tau)}}{v'_i v'_j}. \quad (5.44)$$

Для этого воспользуемся способом, аналогичным тому, который применялся в § 1.9:

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} = \overline{y_i(0) y_j(0)} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} [\overline{v_i(t') v_j(t'')} + \overline{v_i(t'') v_j(t')}] dt''.$$

При однородной стационарной турбулентности величина $\overline{v_i(t') v_j(t'')}$ зависит только от $t'' - t' = \tau$. Отсюда, используя (5.44), получаем

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} = \overline{y_i(0) y_j(0)} + v'_i v'_j \int_0^t dt' \int_0^{t'} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} d\tau,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} = \overline{y_i(0) y_j(0)} + v'_i v'_j \int_0^t (t - \tau) \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} d\tau. \quad (5.45)$$

Можно заметить, что величина $[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L$ является четной функцией от τ , так как

$$[R_{i,j}(\tau)]_L = [R_{j,i}(-\tau)]_L. \quad (5.46)$$

Выражение (5.45) представляет собой обобщение формулы (1.77) на трехмерный случай. Точно так же, как это делалось для последнего выражения, можно теперь рассмотреть и предельные случаи, в которых величина t соответственно либо очень мала, либо очень велика.

При очень малых значениях времени имеем $[R_{i,j}(\tau)]_L \approx [R_{i,j}(0)]_L$ и уравнение (5.45) упрощается:

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} \approx \overline{y_i(0) y_j(0)} + v'_i v'_j [R_{i,j}(0)]_L t^2,$$

или

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} \approx \overline{y_i(0) y_j(0)} + \overline{v_i(t') v_j(t')} t^2. \quad (5.47)$$

В случае очень больших t предположим, что при $\tau > t_0$ справедливо приближенное равенство $[R_{i,j}(\tau)]_L \approx 0$, и, следовательно, при $t \gg t_0$ из (5.45) получим

$$\overline{y_i(t) y_j(t)} \approx \overline{y_i(0) y_j(0)} + 2v'_i v'_j (\mathcal{J}_{i,j})_L t, \quad (5.48)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_{i,j})_L &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} d\tau. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к одномерному случаю. В § 1.9 было показано, что диффузия при однородной турбулентности в случае большого времени диффузии может быть описана с помощью постоянного коэффициента диффузии ϵ . Тогда, например, для диффузии из фиксированной плоскости получается выражение типа гауссовой функции ошибок, подобное уравнению (1.68).

Бэтчелор [16] показал, что описание диффузии меченой жидкой частицы с помощью коэффициента диффузии не обязательно должно быть ограничено большим временем диффузии, если в одномерном случае распределение плотности вероятности величины y_2 является гауссовским. Поскольку, согласно имеющимся опытным данным, распределение плотности вероятности величины y_2 при однородной турбулентности, для которой поперечный сдвиг в среднем отсутствует, действительно является гауссовским как при малых, так и при больших временах диффузии, то остается лишь предположить, что это распределение для y_2 остается гауссовским также и при промежуточных значениях времени диффузии.

Положим, что в момент времени $t = t_0$ меченые жидкие частицы сконцентрированы в области $-a \leq x_2 \leq +a$. Под действием турбулентности эти меченые жидкие частицы начнут двигаться в направлении оси x_2 . Обозначим через $P(x_2, t)$ вероятность пребывания меченой жидкой частицы в точке x_2 в момент времени t . Тогда величина $P(x_2, t)$ идентична распределению концентрации меченых жидких частиц в момент времени t . При $t = t_0$ имеем

$$\begin{aligned} P(x_2, t_0) &= 1, \quad \text{если } -a \leq x_2 \leq +a, \\ P(x_2, t_0) &= 0 \quad \text{вне этой области} \end{aligned}$$

и, кроме того, для любого момента времени

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x_2, t) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_2, t_0) dx_2 = 2a.$$

Пусть $Q(y_2, t; t_0)$ — плотность вероятности $y_2(t - t_0)$, т. е. вероятность того, что жидкая частица в течение времени $t - t_0$ продвинется на расстояние y_2 . Тогда имеем соотношение

$$P(x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x_2 - x'_2, t; t_0) P(x'_2, t_0) dx'_2, \quad (5.49)$$

так как $y'_2(t - t_0) = x_2 - x'_2$ и в интеграл входят составляющие только от тех жидких частиц, которые в момент времени $t = t_0$ находились в точках $-a \leq x'_2 \leq +a$.

Предположим, что распределение плотности вероятности $Q(y_2, t; t_0)$ является гауссовским и, стало быть,

$$Q(y_2, t; t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{y_2^2}}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2\overline{y_2^2}}\right), \quad (5.50)$$

где $\overline{y_2^2}$ зависит только от $t - t_0$.

Подставляя это выражение для $Q(y_2, t; t_0)$ в соотношение (5.49), получаем

$$P(x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{y_2^2}}} \exp\left[-(x_2 - x'_2)^2/2\overline{y_2^2}\right] P(x'_2, t_0) dx'_2.$$

Нетрудно убедиться, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \epsilon_{22} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}, \quad (5.51)$$

где величина

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_2^2} \quad (5.52)$$

имеет смысл коэффициента диффузии. Но так как величина $\overline{y_2^2}$ в общем случае является нелинейной функцией времени, ясно, что коэффициент диффузии, вообще говоря, непостоянен.

С учетом выражения (1.77) для $\overline{y_2^2}$ из (5.52) можно получить

$$\epsilon_{22} = v_2'^2 \int_0^t R_L(\tau) d\tau. \quad (5.53)$$

Этот результат для малой и большой величин t приводит соответственно к $\epsilon_{22} = v_2'^2 t$ и $\epsilon_{22} = v_2' \Lambda_L$.

Следовательно, если изобразить зависимость величины $\epsilon_{22}/v_2' \Lambda_L$ от $v_2' t / \Lambda_L$, то получится кривая, угол которой с осью абсцисс со-

ставляет вначале 45° . При более высоких значениях $v_2' t / \Lambda_L$ эта кривая отклоняется от указанной линейной зависимости, асимптотически приближаясь к постоянному значению 1 при больших значениях $v_2' t / \Lambda_L$.

Обобщение на трехмерный случай, предложенное Бэтчелором [16, 18], основывается на предположении о том, что распределение плотности вероятности всех трех компонент y_i , не только каждое в отдельности, но также и совместно, является гауссовским. Тогда можно показать, что вероятность $P(x_1, x_2, x_3, t)$ пребывания меченой жидкой частицы в точке (x_1, x_2, x_3) в момент времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x_1, x_2, x_3, t) = \epsilon_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(x_1, x_2, x_3, t), \quad (5.54)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_i y_j}. \quad (5.55)$$

Коэффициент диффузии представляется здесь тензором второго ранга и связан с диффузионным тензором $\overline{y_i y_j}$ соотношением (5.55). Относительно своих главных осей тензор $\epsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, и правая часть уравнения (5.54) сокращается до трех членов. В случае изотропной турбулентности имеет место сферическая симметрия и $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$; поэтому правая часть уравнения (5.54) принимает форму лапласиана:

$$\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} P(x_1, x_2, x_3, t).$$

Из выражений (5.47) и (5.48) для $\overline{y_i y_j}$ получим соответственно:

$$\text{для малых } t \quad \epsilon_{ij} = \overline{v_i(t') v_j(t')} t, \quad (5.56)$$

$$\text{для больших } t \quad \epsilon_{ij} = v_i' v_j' (\mathcal{J}_{i,j})_L. \quad (5.57)$$

При промежуточных значениях времени t величина ϵ_{ij} будет изменяться подобно ϵ_{22} , как это было в описанном выше случае одномерной диффузии в направлении оси x_2 .

В настоящий момент обобщения на случай трехмерной диффузии представляют лишь сугубо теоретический интерес и не имеют непосредственного практического значения, так как ничего — ни теоретически, ни экспериментально — не известно относительно коэффициента тензора лагранжевой корреляции $[R_{i,j}(\tau)]_L$. Как мы увидим в следующем параграфе, все доступные для теоретической обработки экспериментальные результаты, касающиеся турбулентной диффузии, вполне удовлетворительно могут быть описаны с помощью одномерных теорий диффузии.

Как указывалось, приведенный выше анализ диффузии отдельной меченой жидкой частицы может быть применен и к движению центра

массы моля жидкости. Но для изучения деформации такого моля жидкости приходится рассматривать относительное движение двух жидких частиц этого моля. Основной вклад в исследование относительной диффузии двух жидких частиц принадлежит Бэтчелору [17], хотя за много лет до него некоторые фундаментальные представления были развиты Тэйлором [19], а также Ричардсоном [20] в его теории диффузии в атмосфере.

Относительная диффузия двух жидких частиц будет, конечно, зависеть от их начального относительного положения и расстояния между ними. Если это начальное расстояние велико по сравнению с интегральным масштабом турбулентности, то между движениями этих двух жидких частиц какой-либо связи существовать не будет и они будут двигаться независимо друг от друга. Но если в то же время эти две жидкие частицы в начальный момент расположены близко одна от другой, то их движения будут тесно связаны, по крайней мере в течение первых фаз их движения, и будут определяться турбулентными движениями, соответствующими многим, если не всем, частотам. Поскольку мы собираемся исследовать относительное движение двух жидких частиц, образующих часть моля жидкости, то будем считать, что эти две жидкие частицы находятся в начальный момент очень близко друг к другу, в пределах расстояния, равного наименьшему масштабу турбулентности. Тогда движение этих жидких частиц как целого состоит в одновременном переносе под действием крупномасштабных турбулентных движений, а относительная диффузия первоначально определяется только турбулентными движениями с наименьшим масштабом. Соответственно по мере увеличения расстояния между двумя жидкими частицами вследствие их относительной диффузии их относительные движения будут все более и более подчиняться движениям с наибольшим масштабом, присущим рассматриваемой турбулентности. Это означает, что расстояние между двумя жидкими частицами Δy_i и разность их скоростей Δv_i являются нестационарными функциями времени, даже если турбулентность сама по себе однородна и статистически стационарна.

Обозначим эти две меченые жидкие частицы символами α и β , а их координаты в данный момент времени — через $(y_i)_\alpha$ и $(y_i)_\beta$. Относительная диффузия этих двух жидких частиц в пространстве может быть описана с помощью тензора относительной диффузии $\overline{\Delta y_i \Delta y_j}$, где

$$\Delta y_i = (y_i)_\beta - (y_i)_\alpha, \quad \Delta y_j = (y_j)_\beta - (y_j)_\alpha$$

Пользуясь этими соотношениями, тензор относительной диффузии можно выразить через диффузионные тензоры $\overline{y_i y_j}$ каждой жидкой

частицы и новые тензоры $\overline{(y_i)_\alpha (y_j)_\beta}$, т. е.

$$\begin{aligned}\overline{\Delta y_i \Delta y_j} &= \overline{(y_i y_j)_\beta} + \overline{(y_i y_j)_\alpha} - \overline{(y_i)_\beta (y_j)_\alpha} - \overline{(y_j)_\beta (y_i)_\alpha} = \\ &= 2\overline{y_i y_j} - \overline{(y_i)_\beta (y_j)_\alpha} - \overline{(y_j)_\beta (y_i)_\alpha},\end{aligned}$$

так как при однородной турбулентности диффузионные тензоры для обеих жидких частиц одинаковы. Тензоры $\overline{(y_i)_\alpha (y_j)_\beta}$ можно выразить через тензоры лагранжевой двойной корреляции $[(Q_{i,j})_L]_{\alpha,\beta} = \overline{(v_i)_\alpha (v_j)_\beta}$, однако каких-либо данных об этих тензорах лагранжевой корреляции для двух частиц не имеется. Поскольку логично предположить, что эти корреляции при большом времени диффузии обращаются в нуль и, стало быть, две жидкие частицы будут двигаться независимо друг от друга, то в результате получим

$$\text{при больших } t \quad \overline{\Delta y_i \Delta y_j} \approx 2\overline{y_i y_j}. \quad (5.58)$$

В то же время можно воспользоваться предположением о том, что при очень малом времени диффузии эти частицы имеют такую начальную скорость $v_i(0)$, которую практически можно принять равной скорости $u_i(x_1, x_2, x_3, 0)$ в начальной точке. Отсюда

$$(y_i)_\alpha \approx [v_i(0)]_\alpha t = [u_i(x_1, x_2, x_3, 0)]_\alpha t$$

и

$$(y_i)_\beta \approx [v_i(0)]_\beta t = [u_i(x_1, x_2, x_3, 0)]_\beta t.$$

Вводя новые координаты $\xi_i = (x_i)_\beta - (x_i)_\alpha$, начало которых, таким образом, совпадает с исходным положением частицы α , в случае однородной турбулентности получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\Delta y_i \Delta y_j}}{t^2} &= \overline{[u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta} + \\ &+ \overline{[u_i(0, 0, 0, 0) u_j(0, 0, 0, 0)]_\alpha} - \\ &- \overline{[u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta [u_j(0, 0, 0, 0)]_\alpha} - \\ &- \overline{[u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta [u_i(0, 0, 0, 0)]_\alpha} = \\ &= 2Q_{i,j}(0, 0) - [Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_{\beta,\alpha} - [Q_{j,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_{\beta,\alpha}. \quad (5.59)\end{aligned}$$

Следовательно, начальное значение тензора относительной диффузии определяется эйлеровыми двойными корреляциями скорости, соответствующими исходным положениям жидких частиц α и β , т. е. корреляциями, которые могут быть измерены непосредственно с помощью известных методов.

Если число Рейнольдса турбулентности очень велико, так что существует достаточно широкая равновесная область, то тогда тензор относительной диффузии в течение первых периодов времени

будет определяться параметрами, характеризующими равновесную область турбулентности, т. е. величинами ν и ϵ , а также временем t . Если дополнительно предположить наличие в этой области локальной изотропности, то для $Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$ оказывается справедливым соотношение (3.11), полученное для изотропной турбулентности. Тогда имеем

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_j} = u_2' \left\{ \left(\frac{\xi_i \xi_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + 2 [1 - f(r)] \delta_{ij} \right\} t^2 + \xi_i \xi_j. \quad (5.60)$$

Но для равновесной области при малых значениях r было получено следующее приближенное соотношение:

$$f(r) \approx 1 - \frac{A}{u'^2} (\epsilon r)^{2/3}, \quad (3.133)$$

где A — универсальная постоянная. Используя это выражение, для тензора относительной диффузии получаем

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_j} \approx \frac{2}{3} A \left(4\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \right) (\epsilon r)^{2/3} t^2 + \xi_i \xi_j. \quad (5.61)$$

откуда вытекает формула для среднеквадратичного значения расстояния:

$$(\overline{\Delta y_i \Delta y_i} - r^2)^{1/2} \approx \left(\frac{22}{3} A \right)^{1/2} (\epsilon r)^{1/3} t. \quad (5.62)$$

Проведенный анализ относительной диффузии двух меченых жидких частиц показывает, что в среднем эти две частицы стремятся сепарироваться, причем расстояние между ними со временем возрастает и если $\overline{\Delta y_i \Delta y_i} \gg r^2$, то этот рост при не слишком больших значениях времени пропорционален ему.

Если обратиться к выражениям (5.58) и (5.62), то можно заключить, что соответствующие скорости сепарации двух меченых жидких частиц постоянны, но имеют различные значения. Скорость сепарации при больших значениях времени намного выше скорости сепарации в начальный период. Следовательно, в отличие от скорости диффузии отдельной жидкой частицы, которая в первые моменты может считаться постоянной, скорость сепарации двух жидких частиц возрастает по времени.

Увеличивающееся по времени расстояние сепарации между двумя жидкими частицами должно иметь место также и в случае течения с равномерной скоростью деформации.

Итак, в турбулентном потоке малые области в пределах наименьшего масштаба турбулентности могут рассматриваться как временные области с равномерной скоростью деформации. Ускоряющуюся в начальные моменты диффузии сепарацию двух жидких частиц в турбулентном потоке можно рассматривать, исходя из

предположения о том, что во все эти моменты времени расстояние между жидкими частицами не превышает наименьшего масштаба турбулентности. В таком случае мы имеем не только $\overline{\Delta y_i \Delta y_i}(0) \approx 0$ при $t=0$, но и во все рассматриваемые моменты времени также $\overline{\Delta y_i \Delta y_i} < \eta^2 = (\nu^3/\epsilon)^{1/2}$. Это нужно всегда иметь в виду, даже если в последующем анализе время t для удобства будет приниматься очень большим.

Тогда скорость деформации жидкости одинакова во всех точках материальной линии, соединяющей обе наши меченые жидкие частицы. Если $|\Delta y(t)|$ — длина этой материальной линии в момент времени t , то, очевидно, имеем соотношение

$$\frac{d|\Delta y|}{dt} = e_{ii} e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} |\Delta y|,$$

где e_{ii} и e_{ij} — направляющие косинусы углов между мгновенным направлением l этой материальной линии и осями координат. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \ln |\Delta y| = e_{ii} e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

По истечении достаточно продолжительного периода времени скорость растяжения при однородной турбулентности, определяемая правой частью этого выражения, будет стационарной случайной функцией времени. Следовательно, в среднем (по большому числу линейных элементов или по большому числу идентичных опытов) скорость растяжения не будет зависеть от времени:

$$\overline{e_{ii} e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \zeta \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где $\zeta \sim (\epsilon/\nu)^{1/2}$, т. е. величина ζ обратно пропорциональна времени, характерному для равновесной области, поскольку мы использовали предположение, что величины $|\Delta y|$ во все моменты времени очень малы. Весьма вероятно, что при $t \rightarrow \infty$ отношение $\Delta y_i/|\Delta y|$ тоже является стационарной случайной функцией времени. Бэтчелор [21] показал, что в этом случае

$$\overline{\frac{d}{dt} \ln |\Delta y|} = \frac{d}{dt} \ln \overline{|\Delta y|}.$$

Отсюда для $\overline{|\Delta y|}$ получаем

$$\overline{|\Delta y|} \approx |\Delta y(0)| \exp(\zeta t). \quad (5.63)$$

Этот результат тоже показывает, что расстояние между двумя жидкими частицами с течением времени возрастает. Следовательно, моль жидкости будет деформироваться таким образом, что расстояние между любыми двумя из его жидких частиц в среднем увеличивается

по времени. Это означает, что деформация малого моля жидкости может происходить только вполне определенным путем.

Бэтчелор [21] и Райд [22] исследовали влияние процесса растяжения материальных линий на деформацию молей жидкости, а также на локальные изменения по времени скалярных и векторных субстанций, переносимых жидкостью, например тепла и завихренности турбулентности. Они пришли к выводу, что любой малый сферический элемент в конечном счете вытягивается в длинную тонкую ленту, у которой

$$\text{длина} \quad \text{пропорциональна} \quad \exp(\zeta_1, t), \quad (5.64a)$$

$$\text{ширина} \quad \text{пропорциональна} \quad \exp(\zeta_2, t), \quad (5.64b)$$

$$\text{толщина} \quad \text{пропорциональна} \quad \exp(\zeta_3, t), \quad (5.64b)$$

где ζ_1 и ζ_2 положительны, а $\zeta_1 \gg \zeta_2$. Ввиду того, что для несжимаемой жидкости имеем условие

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0,$$

обязательно должно быть

$$\zeta_3 = -(\zeta_1 + \zeta_2) < 0.$$

Следует подчеркнуть, что этот сферический элемент должен быть достаточно мал, с тем чтобы выполнялось соотношение (5.63) и исходное предположение. Тогда скорость деформации, испытываемой этим сферическим элементом, почти равномерна. Наблюдения Таунсенда [23] над диффузией тепловых пятен при однородной турбулентности показывают, что при этом происходит медленное вращение относительно жидкости главных осей скорости деформации, которой подвержен жидкий элемент, и что эти оси практически остаются совмещенными с главными осями того эллипсоида, в который первоначально преобразуется сферический элемент. Наблюдения Таунсенда дают, кроме того, основания полагать, что протяженность двух главных осей этого эллипсоида велика по сравнению с длиной третьей оси, а также сравнительно с диаметром исходной сферы.

Таким образом, все материальные линии и поверхности имеют тенденцию стать параллельными направлению максимальной скорости растяжения. Этот вид деформации любого жидкого элемента имеет тесное отношение к изменениям скалярных и векторных субстанций, увлеченных этим жидким элементом.

Если имеется неравномерное распределение какой-либо скалярной субстанции, например тепла, то градиенты этой скалярной субстанции будут изменяться в ходе деформации жидкого элемента. При этом градиент в направлении, скорость растяжения в котором составляет ζ_i , изменяется обратно пропорционально величине $\exp(\zeta_i t)$. Следовательно, градиент скалярной субстанции резко возрастает в направлении наикратчайшей главной оси эллипсоида, в который преобразуется

исходный сферический элемент, так как две соседние поверхности постоянной концентрации этой скалярной субстанции стремятся подойти одна к другой как можно ближе.

Итак, если Γ — скалярная субстанция и рассматривается движущаяся вместе с жидким элементом система координат x_i^* , оси которой совпадают с главными осями удлиняющегося эллипсоида, то имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} \sim \exp(-\zeta_i t). \quad (5.65)$$

В то же время векторная субстанция, например завихренность ω_k , будет возрастать пропорционально увеличению того линейного элемента, который по направлению совпадает с этой векторной субстанцией, так как величина вектора обратно пропорциональна площади поперечного сечения векторной трубки. Следовательно, в системе координат x_i^*

$$\omega_1 \sim \exp[-(\zeta_2 + \zeta_3) t] = \exp(\zeta_1 t),$$

или, в более общем виде,

$$\omega_k \sim \exp(\zeta_k t). \quad (5.66)$$

Из уравнений (5.65) и (5.66) получается следующий интересный результат:

$$\delta_{ik} \omega_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} = \omega_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} \sim \exp(-\zeta_i t) \exp(\zeta_i t) = 1,$$

или

$$\omega_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} = \text{const.} \quad (5.67)$$

Этот результат, найденный для общего случая скалярной и векторной субстанций Бэтчелором и Таунсендом [25], был получен ранее Эртелем [24] в его метеорологических исследованиях для градиента температуры и завихренности.

Соотношения (5.65) — (5.67) справедливы только в том случае, когда молекулярная диффузия отсутствует. Однако в действительности молекулярная диффузия всегда имеет место, а ее влияние сильно возрастает благодаря процессу растяжения жидких элементов. Это означает, что, если даже молекулярная диффузия очень мала по сравнению с вихревой диффузией, ее влияние отнюдь не обязательно пренебрежимо мало благодаря сильному возрастанию локальных градиентов под действием турбулентности. Следовательно, повышенная молекулярная диффузия и вихревая диффузия не являются независимыми друг от друга процессами, а тесно связаны между собой. Еще одно вытекающее отсюда следствие состоит в том, что в большинстве случаев оказывается весьма затруднительным, если

не невозможным, учесть влияние молекулярной диффузии на диффузионные процессы в турбулентных потоках.

Возвратимся теперь вновь к теориям пути смешения и посмотрим, как влияют рассмотренные выше факторы на эти теории. Моли жидкости, которые, по предположению, сохраняют транспортабельную субстанцию на расстоянии, равном длине пути смешения, имеют размеры, одинаковые по порядку величины с этой длиной и с лагранжевым интегральным масштабом диффузии отдельной жидкой частицы. На своем пути (равном пути смешения) жидкий моль под действием мелкомасштабных турбулентных движений будет деформироваться. Деформация и растяжение жидких элементов этого моля вызывают повышенный обмен транспортабельной субстанции с окружающей жидкостью благодаря мелкомасштабной вихревой диффузии и возросшей молекулярной диффузии, как это было описано выше. Сложность этого процесса диффузии, а значит, и переноса транспортабельной субстанции между молекулой и окружающей его средой не позволяет описать подобный обмен с помощью простого закона типа (5.37). Как отмечалось, Бюргерс выдвинул предположение о том, что линейное соотношение (5.37) применимо лишь для очень малых жидких частиц, но даже и в этом случае усиленная молекулярная диффузия, обусловленная растяжением, должна оказывать значительное влияние на величину коэффициента обмена α , который входит в соотношение (5.37).

При изучении относительной диффузии двух меченых частиц было показано, что в течение начального периода диффузии тензор относительной диффузии $\overline{\Delta u_i \Delta u_j}$ тесно связан с эйлеровыми двойными корреляциями, соответствующими исходным положениям этих двух жидких частиц [см. уравнение (5.59)]. Что касается отдельной жидкой частицы, то и в этом случае снова можно предполагать наличие в течение первого периода диффузии тесной связи между лагранжевой диффузионной корреляцией и эйлеровыми корреляциями, относящимися к исходному положению частицы. И в самом деле, как будет показано, можно получить соотношения между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами, хотя эти соотношения и содержат обычно корреляции скорости более высокого порядка, о которых либо ничего не известно, либо известно очень мало.

В случае большего времени диффузии тоже можно ожидать существования некоторой связи между лагранжевой и эйлеровой корреляциями. Но подобного рода соотношение будет очень сложным, даже в случае однородной и изотропной турбулентности. Рассмотрим, например, лагранжеву корреляцию между компонентами скорости v_2 в направлении оси x_2 некоторой меченой жидкой частицы для двух моментов времени:

$$[Q_{2,2}(\tau)]_L = \overline{v_2(t) v_2(t + \tau)}.$$

Считается, что меченая жидкая частица в момент времени t находится в точке с координатами y_k . В течение времени τ эта частица перемещается на расстояние η_k . Операцию осреднения можно производить либо как осреднение по совокупности, либо, поскольку турбулентность принимается однородной и стационарной, как осреднение по времени t или по пространству.

Компонента скорости v_2 меченой жидкой частицы будет равна скорости u_2 в той точке, которую только что миновала жидкая частица. Следовательно,

$$v_2(t) = u_2(y_k, t) \quad (5.68a)$$

и

$$v_2(t + \tau) = u_2(y_k + \eta_k, t + \tau), \quad (5.68b)$$

где величины η_k и τ связаны соотношением

$$\eta_k = \int_t^{t+\tau} v_k(t') dt', \quad (5.69)$$

откуда

$$\overline{v_2(t) v_2(t + \tau)} = \overline{u_2(y_k, t) u_2(y_k + \eta_k, t + \tau)},$$

или

$$[Q_{2,2}(\tau)]_L = [Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E. \quad (5.70)$$

Эйлерова корреляция в правой части этого равенства не является ни обычной пространственной двойной корреляцией скорости в двух точках, находящихся друг от друга на расстоянии η_k , в один и тот же момент времени, ни двойной корреляцией в одной точке за интервал времени τ , а представляет собой пространственно-временную корреляцию. Кроме того, величины η_k и τ не являются независимыми друг от друга; связь между ними определяется формулой (5.69).

Чандрасекар [26] провел для случая стационарной изотропной турбулентности исследование кинематики и динамики двойной корреляции скорости относительно пространства и времени. По-видимому, представляется возможным выразить эту двойную корреляцию скорости через единственный определяющий скаляр, например $f(r, \tau)$ — коэффициент двойной продольной корреляции скорости в двух точках, находящихся одна от другой на расстоянии r , за интервал времени τ :

$$f(r, \tau) = \frac{\overline{u_r(0, 0) u_r(r, \tau)}}{u'^2}.$$

Логично предположить, что существует связь между $f(r, \tau)$, коэффициентом продольной пространственной корреляции $f(r)$ и коэффициентом эйлеровой временной корреляции $R_E(\tau) = \overline{u(t) u(t + \tau)} / u'^2$.

Однако пока о подобном соотношении для общего случая произвольных значений r и τ ничего не известно.

Это соотношение можно получить путем разложения $f(r, \tau)$ в ряд по степеням r и τ с коэффициентами, являющимися производными от $f(r)$ и $R_E(\tau)$ при $r=0$ и $\tau=0$. Тот же способ можно, конечно, применить и непосредственно к соотношению (5.70). Таким образом,

$$\begin{aligned} [Q_{2,2}(\tau)]_L &= [Q_{2,2}(0)]_L + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{d^2(Q_{2,2})_L}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} + \frac{\tau^4}{4!} \left[\frac{d^4(Q_{2,2})_L}{d\tau^4} \right]_{\tau=0} + \dots = \\ &= [\bar{v}_2^2]_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2} \left[v_2 \frac{d^2 v_2}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} + \frac{\tau^4}{4!} \left[v_2 \frac{d^4 v_2}{d\tau^4} \right]_{\tau=0} + \dots, \end{aligned} \quad (5.71)$$

так как при однородной стационарной турбулентности

$$\left[v_2 \frac{dv_2}{d\tau} \right]_{\tau=0} = 0, \quad \left[v_2 \frac{d^3 v_2}{d\tau^3} \right]_{\tau=0} = 0 \dots$$

Аналогично для $[Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E$ получаем

$$\begin{aligned} [Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E &= \bar{u}_2^2 + \frac{\eta_k \eta_l}{2} \left[u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_k \partial \eta_l} \right]_{\substack{\tau=0 \\ \eta_k=0}} + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \left[u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} \right]_{\substack{\tau=0 \\ \eta_k=0}} + \eta_k \tau \left[u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_k \partial \tau} \right]_{\substack{\tau=0 \\ \eta_k=0}} + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

Выражение (5.69) также может быть разложено в ряд:

$$\eta_k = [v_k]_{\tau=0} \tau + \left[\frac{dv_k}{d\tau} \right]_{\tau=0} \frac{\tau^2}{2} + \dots \quad (5.73)$$

Метод разложения в степенной ряд с целью получения связи между лагранжевой и эйлеровой корреляциями имеет практический смысл только в применении к малым интервалам времени τ . Но наряду с этим приведенный выше анализ является хорошей иллюстрацией того, насколько сложна эта проблема и каковы трудности, встречающиеся на пути отыскания указанного соотношения.

В дальнейшем будем рассматривать только малые интервалы времени τ . Из уравнений (5.71) — (5.73) можно получить соотношение между величиной $[v_2 d^2 v_2 / d\tau^2]_{\tau=0}$ и соответствующим выражением для эйлеровой скорости $u_2(y_k, t)$. Однако это соотношение легко вывести также, исходя из уравнения

$$\frac{dv_2}{d\tau} = \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i}. \quad (5.74)$$

Но ввиду того, что при однородной стационарной турбулентности

$$\overline{\left[v_2 \frac{d^2 v_2}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}} = - \overline{\left[\frac{dv_2}{d\tau} \right]^2_{\tau=0}},$$

искомое соотношение получается просто путем возведения в квадрат обеих частей соотношения (5.74). Таким образом,

$$- \overline{\left[v_2 \frac{d^2 v_2}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}} = \overline{\left(\frac{dv_2}{d\tau} \right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right)^2} + 2u_i \overline{\frac{\partial u_2}{\partial \tau} \frac{\partial u_2}{\partial x_i}} + u_i u_j \overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j}}. \quad (5.75)$$

Итак, имеем $\overline{(dv_2/d\tau)^2} = 2/\tau_L^2$ и $\overline{(\partial u_2/\partial \tau)^2} = 2/\tau_E^2$. Кроме того, для выражения последних двух членов в правой части (5.75) через соответствующие коэффициенты корреляции, а также временной микромасштаб τ_E и пространственные микромасштабы λ_{2i} можно использовать метод Френкиля [27]. Если, кроме этого, предположить еще наличие изотропности, в случае которой все λ_{2i} выражаются через λ_g , то в конечном счете получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\tau_L^2} = \frac{1}{\tau_E^2} + A \frac{u'}{\tau_E \lambda_g} + B \frac{u_2'}{\lambda_g^2}, \quad (5.76)$$

где A и B — численные постоянные, содержащие, помимо других величин, значения рассматриваемых коэффициентов корреляции при $\tau=0$ и $x_i=0$. Но вследствие того, что значения этих коэффициентов корреляции, а следовательно, и значения A и B неизвестны, соотношение (5.76) между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами для расчета лагранжева микромасштаба по известному, например, из непосредственных измерений эйлерову микромасштабу лишено практического смысла.

Другой метод, который позволяет получить соотношение между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами, не содержащее неизвестных коэффициентов, принадлежит Юберою и Корсину [28]. При этом предполагается наличие изотропности и в качестве исходного соотношения используется уравнение движения для компоненты скорости v_2 :

$$\frac{dv_2}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.77)$$

Ввиду того, что при изотропной турбулентности

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k}} = 0,$$

из уравнения (5.77) получим

$$\overline{\left(\frac{dv_2}{dt} \right)^2} = \frac{1}{\rho^2} \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2} + \nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_l \partial x_l}}. \quad (5.78)$$

Каждый член в правой части уравнения (5.78) можно выразить через коэффициент двойной продольной корреляции $f(r)$, а именно: первый член — с помощью соотношения (3.240), а второй член — с помощью соотношения, которое получается следующим образом.

Введем тензор двойной корреляции скорости $(Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}$; тогда имеем

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} (Q_{i,j})_{A,B}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l} = \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j} \right]_{r=0}.$$

Из (3.19) получим

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j} \right]_{r=0} = \frac{35}{3} \delta_{ij} u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0}, \quad (5.79)$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_l \partial x_l} = \frac{35}{3} u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0}. \quad (5.80)$$

Замена обоих членов в правой части уравнения (5.78) соответственно по формулам (3.240) и (5.80) дает

$$\left(\frac{dv_2}{dt} \right)^2 = 4u'^4 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 dr + \frac{35}{3} v^2 u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0}. \quad (5.81)$$

Чтобы найти численное значение правой части этого уравнения, надо знать выражение для функции $f(r)$ в широком диапазоне значений r . В главе 3 для $f(r)$ было получено точное выражение в полностью вязкой области турбулентности, т. е. при очень малых значениях числа Рейнольдса турбулентности Re_λ . Для очень больших значений Re_λ , когда имеется существенный диапазон волновых чисел, в котором справедлив спектр Колмогорова, аналитическое выражение для $f(r)$ также известно в широком диапазоне значений r .

Остановимся вначале на случае очень больших значений Re_λ . Будем считать, что значения Re_λ настолько велики, что для энергетического спектра $E(k)$ справедливо выражение (3.128). Соответствующее значение $f(r)$ может быть при этом вычислено с помощью соотношения (3.68). Таким образом,

$$4 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'^2 f}{\partial r} \right)^2 dr = 16 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[\int_0^\infty E(k) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) dk \right]^2 dr.$$

Подставляя сюда вместо $E(k)$ выражение (3.128) и вводя одновременно обозначения $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ и $\varepsilon = 15\nu u'^2/\lambda_g^2$, после некоторых преобразований получаем

$$4 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'^2 f}{\partial r} \right)^2 dr = \frac{2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{3}{2}}}{3} A \frac{\nu u'^3}{\lambda_g^3},$$

где

$$A = \int_0^\infty s \left[\int_0^\infty \frac{s^4 w^{-2/3}}{(s^4 + w^4)^{4/3}} \frac{d}{dw} \left(\frac{\sin w}{w^3} - \frac{\cos w}{w^2} \right) dw \right]^2 ds = 0,03776.$$

Значение этого интеграла было определено численным и графическим методами.

Для второго члена в правой части соотношения (5.81) получим

$$\begin{aligned} \frac{35}{3} \nu^2 u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0} &= \frac{70}{3} \nu^2 \int_0^\infty E(k) \left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} \left(\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) \right]_{r=0} dk = \\ &= \frac{2}{3} \nu^2 \int_0^\infty k^4 E(k) dk, \end{aligned}$$

или, с учетом (3.128),

$$\begin{aligned} \frac{35}{3} \nu^2 u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0} &= \nu^2 k_d^5 \left(\frac{8}{9\pi} \right)^{2/3} (\varepsilon \nu^5)^{1/4} \left(\frac{8}{3\pi^2} \right)^{-5/6} \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} = \\ &= \alpha \frac{\nu u'^3}{\lambda_g^3} \frac{15^{3/2} \pi \sqrt{\pi}}{\sqrt{6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}. \end{aligned}$$

Если в то же время воспользоваться формулой

$$\left(\frac{dv_2}{dt} \right)^2 = \frac{2u'^2}{\tau_L^2},$$

то соотношение (5.81) примет вид

$$\frac{1}{\tau_L^2} = 12,75 \frac{\nu u'}{\alpha \lambda_g^3} + \alpha \frac{3 (5\pi/2)^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \frac{\nu u'}{\lambda_g^3} = \left(\frac{12,75}{\alpha} + 4,46\alpha \right) \frac{\nu u'}{\lambda_g^3}.$$

Итак, получаем связь между τ_L и λ_g для больших значений Re_λ , которая выражается формулой

$$\frac{\lambda_g^2}{u'^2 \tau_L^2} = \left(\frac{12,75}{\alpha} + 4,46\alpha \right) \frac{1}{Re_\lambda}. \quad (5.82)$$

С другой стороны, при очень малых значениях Re_λ для $f(r)$ можно воспользоваться выражением (3.45), которое, будучи записанным через λ_g , имеет вид

$$f(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\lambda_g^2}\right).$$

Тогда из соотношения (5.81) для очень малых значений Re_λ получим следующую зависимость:

$$\left(\overline{\frac{dv_2}{dt}}\right)^2 = \frac{u'^4}{\lambda_g^2} \left(2 + 35 \frac{1}{Re_\lambda^2}\right) \approx 35 \frac{u'^4}{\lambda_g^2} \frac{1}{Re_\lambda^2},$$

откуда вытекает, что влиянием члена, характеризующего давление, в уравнении (5.82) можно пренебречь.

При таком сильном влиянии вязкости уже нельзя пренебречь процессом вырождения турбулентности, как это делалось до сих пор, когда турбулентность предполагалась стационарной; Юберой и Корсин показали, что для вырождающейся турбулентности

$$\frac{2u'^2}{\tau_L^2} = \left(\overline{\frac{dv_2}{dt}}\right)^2 - \left(\frac{dv_2'}{dt}\right)^2.$$

При $dv_2'/dt = du'/dt = -5\nu u'/\lambda_g^2$ окончательно получим

$$\frac{2u'^2}{\tau_L^2} \approx 35 \frac{u'^4}{\lambda_g^2} \frac{1}{Re_\lambda^2} - 25\nu^2 \frac{u'^2}{\lambda_g^4} = 10 \frac{u'^4}{\lambda_g^2} \frac{1}{Re_\lambda^2},$$

или

$$\frac{\lambda_g^2}{u'^2 \tau_L^2} \approx \frac{5}{Re_\lambda^2}. \quad (5.83)$$

Относительно величины $\lambda_g/u'\tau_L$ есть некоторые экспериментальные данные, полученные Юбероем и Корсином [28] при исследовании изотропной турбулентности за решеткой, но эти данные имеют настолько большой разброс, что получить надежное подтверждение теоретического соотношения (5.82), кроме оценки по порядку величины, оказывается практически невозможным.

Уравнения (5.82) и (5.83) представляют собой непосредственную связь между лагранжевым микромасштабом τ_L и эйлеровым пространственным микромасштабом λ_g . Весьма возможно, что некоторая связь существует также между лагранжевым и эйлеровым пространственными интегральными масштабами, но для ее определения пришлось бы рассмотреть большие интервалы времени диффузии. Подобные соотношения в этом случае становятся очень громоздкими, и задача отыскания их пока остается нерешенной.

Но в то же время экспериментальные факты свидетельствуют о том, что по меньшей мере при больших числах Рейнольдса общая

форма зависимости коэффициента лагранжевой корреляции $R_L(\tau)$ и коэффициента продольной пространственной корреляции $f(r)$ может быть аппроксимирована соответственно экспоненциальными функциями $\exp(-\tau/\mathcal{T}_L)$ и $\exp(-r/\Lambda_f)$. Таким образом, эти коэффициенты корреляции описываются одинаковыми функциональными зависимостями. В таком случае можно предположить, что коэффициенты лагранжевой и эйлеровой корреляции вообще имеют одинаковое функциональное выражение; тогда лагранжев и эйлеров интегральные масштабы должны быть пропорциональны. Подобное предположение было выдвинуто Микельсеном [30]. Итак, если $f(r) = \varphi(r/\Lambda_f)$ и $R_L(\tau) = \varphi(\tau/\mathcal{T}_L)$, то должно выполняться соотношение

$$\tau = \frac{r\mathcal{T}_L}{\Lambda_f} = r \frac{\Lambda_L}{u'\Lambda_f} = \frac{r}{\beta u'},$$

где $\beta = \Lambda_f/\Lambda_L$.

Микельсен проводил опыты с почти однородной изотропной турбулентностью в центральном ядре турбулентного потока в трубе с диаметром 20 см. Число Рейнольдса Re_D изменялось приблизительно от $2 \cdot 10^5$ до $6 \cdot 10^5$. Микельсен производил раздельное измерение коэффициента продольной корреляции $f(r)$ и коэффициента лагранжевой корреляции методом диффузии гелия вниз по потоку от фиксированной точки вдува. Он обнаружил, что при одинаковых значениях $\varphi(r/\Lambda_f)$ и $\varphi(\tau/\mathcal{T}_L)$ величина r в пределах точности эксперимента пропорциональна τ при постоянном значении β . Этот коэффициент пропорциональности возрастает почти линейно с увеличением интенсивности турбулентности u' ; его среднее значение в рассмотренном диапазоне изменения u' составляло 0,6. Следует отметить, что использованный метод приводит к результатам, которые весьма нечувствительны к изменениям формы любого коэффициента корреляции. Больше того, определение турбулентной диффузии жидких частиц по диффузии «трассирующего» газа становится неясным благодаря неизвестному влиянию молекулярной диффузии, как об этом говорилось выше; а это, в свою очередь, усугубляет ненадежность определения лагранжевых корреляций для жидких частиц. К обсуждению этого вопроса мы возвратимся в следующем параграфе.

Самое большее, что можно выявить из опытов Микельсена, — это то, что общая форма зависимости коэффициентов лагранжевой и эйлеровой корреляции одинакова.

Юберой и Корсин [28] тоже произвели раздельное измерение интегральных масштабов Λ_L и Λ_f , но на этот раз — при изотропной турбулентности, созданной с помощью решетки. Хотя в величинах Λ_f/Λ_L и наблюдается значительный разброс, все же можно сделать вывод, что и в этом случае величина β тоже возрастает с

увеличением Re_{Λ_f} . В первом приближении можно принять, что при малых значениях (≈ 10) величины Re_{Λ_f} имеем $\beta \approx 0,5$, а при больших значениях (≈ 100) величины Re_{Λ_f} $\beta \approx 0,8$.

§ 5.5. Диффузия от неподвижного источника в равномерном потоке

В этом параграфе мы рассмотрим турбулентную диффузию вещества или тепла, которое непрерывно подводится неподвижным источником, либо точечным, либо в виде бесконечной линии, помещенным в турбулентном потоке. Будем считать, что количество вещества или тепла, выделяемого в единицу времени на единицу объема, настолько невелико, что какое-либо влияние его на турбулентность пренебрежимо мало. Осредненную скорость турбулентного потока будем предполагать равномерной, причем постоянную скорость в направлении x_1 обозначим через $\bar{U}_1$. В следующем параграфе будет рассмотрен случай турбулентного потока с поперечным сдвигом, когда скорость $\bar{U}_1$ имеет градиент только в направлении оси x_2 .

Большинство опытов по турбулентной диффузии касается диффузии от неподвижного источника, и имеющиеся данные могут быть использованы для проверки соответствующих теорий. Важный вклад в теорию представляет цикл работ Френкиля [32–35], в которых исследовалось распределение жидких частиц на малых и на больших расстояниях от источника, т. е. при малом и большом интервалах времени диффузии, а также при произвольно больших значениях коэффициентов диффузии.

Прежде чем перейти к результатам экспериментальных исследований, рассмотрим диффузию от неподвижного источника теоретически.

Для начала обратимся к диффузии и распределению в пространстве меченых жидких частиц, выделяемых с постоянной объемной скоростью неподвижным источником. Самым простым случаем является тот, в котором диффузия этих меченых жидких частиц может быть определена с помощью коэффициента диффузии. Это должно соответствовать тем условиям, при которых турбулентность однородна и изотропна и рассматривается продолжительное время диффузии. Тогда наша задача оказывается идентичной с проблемой молекулярной диффузии и теплопроводности в изотропной среде. Решения для распределений концентрации или температуры вниз по потоку от точечного или линейного источника даются, например, Карслоу и Егером [31]. Осредненная концентрация меченых жидких частиц в точке (x_1, x_2, x_3) идентична с вероятностью $P(x_1, x_2, x_3)$ пребывания меченой жидкой частицы в этой точке. Дифференциаль-

ное уравнение для этой осредненной концентрации, или для P , записывается в виде [ср. с уравнением (5.54)]:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} P. \quad (5.84)$$

Решения этого уравнения таковы.

1. *Точечный источник* с интенсивностью S в начале координат:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{4\pi r \epsilon} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1(r - x_1)}{2\epsilon}\right], \quad (5.85)$$

где $r^2 = x_i x_i$.

Это решение можно упростить, если рассматривать точки, расположенные вблизи оси x_1 , так что $x_2^2 + x_3^2 \ll x_1^2$ или $r/x_1 \approx 1$:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{4\pi \epsilon |x_1|} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1(x_2^2 + x_3^2)}{4\epsilon |x_1|}\right]. \quad (5.85a)$$

2. *Линейный источник* с интенсивностью S^* на единицу длины, ориентированный вдоль оси x_3 :

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi \epsilon} K_0\left(\frac{\bar{U}_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2\epsilon}\right) \exp\left(\frac{\bar{U}_1 x_1}{2\epsilon}\right), \quad (5.86)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Так как $K_0(z) \rightarrow (\pi/2z)^{1/2} \exp(-z)$ при $z \rightarrow \infty$, то решение (5.86) для малых $\epsilon/\bar{U}_1 x_1$ и не слишком больших значений x_2/x_1 упрощается:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{2 \sqrt{\pi \epsilon \bar{U}_1 |x_1|}} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1 x_2^2}{4\epsilon |x_1|}\right). \quad (5.86a)$$

Заметим, что решения (5.85) и (5.86) дают конечную концентрацию в точках, расположенных вверх по потоку от источника, которая с увеличением расстояния вверх по потоку быстро убывает.

В предыдущем параграфе упоминалось доказательство Бэтчелора того факта, что вероятность $P(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, подобному (5.84), если распределения плотности вероятности всех трех компонент y_i диффундирующей меченой жидкой частицы считаются как в отдельности, так и в совокупности гауссовскими. Как мы увидим ниже, экспериментальные данные показывают, что для малого и большого интервалов времени диффузии распределения плотности вероятности величин y_i при однородной турбулентности с равномерной осредненной скоростью являются гауссовскими. Флайшман и Френкиль [36] доказали, что в этом случае при малом и большом интервалах времени

диффузии решения для распределения концентрации можно получить непосредственно, без рассмотрения соответствующих дифференциальных уравнений. При малом времени диффузии коэффициенты диффузии зависят от времени. Кроме того, нет никакой необходимости ограничиваться случаем изотропной турбулентности, т. е. турбулентности, при которой коэффициент диффузии не зависит от направления.

Пусть $Q(x_i - x'_i, t; t_0)$ — плотность вероятности попадания меченой жидкой частицы в момент времени t в точку (x_i) из точки (x'_i) , где она находилась в момент времени t_0 . Тогда имеем [см. соотношение (5.49)]

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int Q(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3, t; t_0) \times \\ \times P(x'_1, x'_2, x'_3, t_0) dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (5.87)$$

Предположим, что главные оси тензора турбулентных напряжений совпадают с осями координат. Тогда выражение для плотности вероятности Q запишется в виде

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (\overline{y_1^2 y_2^2 y_3^2})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - x'_1)^2}{\overline{y_1^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(x_2 - x'_2)^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{(x_3 - x'_3)^2}{\overline{y_3^2}} \right] \right\}, \quad (5.88)$$

где величины $\overline{y_i^2}$ пока являются функциями времени.

Если в момент времени $t=0$ в начале координат $(x'_i=0)$ в окружающую среду с нулевой осредненной скоростью выделяется меченая жидкость с объемом s , то вероятность $P(x_i, t)$, согласно формулам (5.87) и (5.88), запишется так:

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{s}{(2\pi)^{3/2} (\overline{y_1^2 y_2^2 y_3^2})^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{x_3^2}{\overline{y_3^2}} \right) \right].$$

Если в момент времени t_0 в течение короткого интервала времени dt_0 в начале координат выделяется меченая жидкость, объемный расход которой составляет S , тогда, так как все поле течения имеет в направлении оси x_1 постоянную осредненную скорость $\bar{U}_1$, записанное выше выражение справедливо и в системе координат x'_i , движущейся вместе с потоком со скоростью $\bar{U}_1$. В этом слу-

чае величины x_1 и x_1^* в момент времени t связаны соотношением $x_1^* = x_1 - \bar{U}_1(t - t_0)$, но при этом $x_2^* = x_2$ и $x_3^* = x_3$. Отсюда вероятность пребывания в момент времени t в точке (x_i) меченой жидкости, выделяемой в течение интервала времени dt_0 , записывается в виде

$$P'(x_1, x_2, x_3, t - t_0) dt_0 = \\ = \frac{S dt_0}{(2\pi)^{3/2} (\bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2 \bar{y}_3^2)^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{[x_1 - \bar{U}_1(t - t_0)]^2}{\bar{y}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{y}_3^2} \right\} \right),$$

откуда при непрерывном выделении жидкости с объемным расходом S получаем

$$P(x_1, x_2, x_3) = \\ = \int_{-\infty}^t \frac{S}{(2\pi)^{3/2} (\bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2 \bar{y}_3^2)^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{[x_1 - \bar{U}_1(t - t_0)]^2}{\bar{y}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{y}_3^2} \right\} \right) dt_0,$$

или, если произвести замену $\tau = t - t_0$,

$$P(x_1, x_2, x_3) = \\ = \int_0^{\infty} \frac{S}{(2\pi)^{3/2} (\bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2 \bar{y}_3^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - \bar{U}_1 \tau)^2}{\bar{y}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{y}_3^2} \right] \right\} d\tau. \quad (5.89)$$

Таким образом, мы получили общее решение задачи о диффузии от непрерывно действующего *точечного источника* в равномерном потоке при однородной турбулентности.

Рассмотрим сначала малый интервал времени диффузии, что соответствует малым расстояниям от точечного источника. В этом случае можно положить [см. уравнение (1.78)], что

$$\bar{y}_i^2 = \bar{v}_i^2 (t - t_0)^2 = \bar{u}_i^2 \tau^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда интеграл (5.89) примет вид

$$P(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{S}{(2\pi)^{3/2} (\bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2 \bar{u}_3^2)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - \bar{U}_1 \tau)^2}{\bar{u}_1^2 \tau^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2 \tau^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2 \tau^2} \right] \right\} d\tau.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S \exp(-\bar{U}_1^2/2\bar{u}_1^2)}{(2\pi)^{3/2} (\bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2 \bar{u}_3^2)^{1/2} \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x_1 \bar{U}_1 \exp \left[\frac{x_1^2 \bar{U}_1^2}{2(\bar{u}_1^2)^2 \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)} \right]}{\bar{u}_1^2 \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)^{1/2}} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{erfc} \left[\frac{-x_1 \bar{U}_1}{\sqrt{2} \bar{u}_1^2 \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (5.90)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\alpha^2) d\alpha.$$

Если решение (5.90) должно оставаться совместным с предположением о малом времени диффузии, то его справедливость ограничена. Согласно этому предположению, время диффузии τ должно быть мало по сравнению, скажем, с лагранжевым интегральным масштабом; таким образом, $\tau \ll \mathcal{J}_L$. Но интегрирование распространяется на диапазон изменения τ от нуля до бесконечности. Следовательно, этот интервал совместен с предположением $\tau \ll \mathcal{J}_L$ только в том случае, когда в нем роль составляющих от больших значений τ пренебрежимо мала. Иными словами, величина подынтегрального выражения при значениях τ , сравнимых с $\mathcal{J}_L$, должна становиться исчезающе малой. Можно показать, что это условие выполняется, если

$$\frac{x_1 \bar{U}_1}{\bar{u}_1^2 \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)^{1/2}} \gg 1.$$

В этом случае решение (5.90) упрощается, принимая следующий вид:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{2\pi (\bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2 \bar{u}_3^2)^{1/2} \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)^{3/2}} \times \\ \times \frac{x_1 \bar{U}_1}{\bar{u}_1^2} \exp \left[- \frac{\bar{U}_1^2 \left(\frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2} \right)}{\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} + \frac{x_3^2}{\bar{u}_3^2}} \right]. \quad (5.90a)$$

Значительно более сильное упрощение получается в предположении о том, что относительная интенсивность турбулентности мала: $\bar{u}_1^2 / \bar{U}_1^2 \ll 1$. Это предположение в то же время означает также, что $(\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) / \bar{x}_1^2 \ll 1$, ибо величины $\bar{u}_2^2$ и $\bar{u}_3^2$ — такого же порядка, как и $\bar{u}_1^2$. При этом условии решение (5.90) записывается следующим образом:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S \bar{U}_1}{2\pi (\bar{u}_2^2 \bar{u}_3^2)^{1/2} x_1^2} \exp \left[- \frac{\bar{U}_1^2}{2\bar{u}_1^2} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2} \frac{\bar{u}_1^2}{\bar{u}_3^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \frac{\bar{u}_1^2}{\bar{u}_3^2} \right) \right] \quad (5.90b)$$

При большом времени диффузии, т. е. для больших расстояний от точечного источника, можно ввести асимптотические постоянные значения коэффициентов диффузии:

$$\epsilon_{11} = \frac{\bar{y}_1^2}{2(t - t_0)} \quad \text{или} \quad \bar{y}_1^2 = 2\epsilon_{11}\tau$$

и аналогично

$$\bar{y}_2^2 = 2\epsilon_{22}\tau, \quad \bar{y}_3^2 = 2\epsilon_{33}\tau.$$

Тогда из (5.89) получим

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{(4\pi)^{3/2} (\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2}} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{1}{4} \left[\frac{(x_1 - \bar{U}_1\tau)^2}{\epsilon_{11}\tau} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}\tau} + \frac{x_3^2}{\epsilon_{33}\tau} \right] \right\} d\tau,$$

или, после интегрирования,

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{4\pi (\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2} \left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}} + \frac{x_3^2}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{\bar{U}_1}{2\epsilon_{11}} \left[\epsilon_{11}^{1/2} \left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}} + \frac{x_3^2}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2} - x_1 \right] \right\}. \quad (5.91)$$

Нетрудно убедиться в том, что этот результат, если ввести предположение об изотропности, т. е. принять $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$, идентичен с выражением (5.85а).

Для точек, расположенных вблизи оси x_1 , можно получить следующее приближенное выражение, которое соответствует решению (5.85а):

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{4\pi (\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2} |x_1|} \exp \left[-\frac{\bar{U}_1}{4\epsilon_{11} |x_1|} \left(x_2^2 \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} + x_3^2 \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} \right) \right]. \quad (5.91a)$$

Задача о диффузии в равномерном потоке от непрерывного *линейного источника*, расположенного вдоль оси x_3 , может быть решена посредством интегрирования уравнения (5.89) по x_3 от $-\infty$ до $+\infty$. При этом получаем выражение

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(\bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - \bar{U}_1 \tau)^2}{\bar{y}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2} \right] \right\} d\tau, \quad (5.92)$$

где S^* — интенсивность источника на единицу длины. Для малых расстояний снова можно воспользоваться предположением, что

$$\bar{y}_1^2 = \bar{u}_1^2 \tau^2 \quad \text{и} \quad \bar{y}_2^2 = \bar{u}_2^2 \tau^2.$$

Тогда решение (5.92) преобразуется так:

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\sqrt{2\pi} (\bar{u}_2^2 x_1^2 + \bar{u}_1^2 x_2^2)^{1/2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{-\bar{u}_2' \bar{U}_1 x_1}{\bar{u}_1' (2\bar{u}_2^2 x_1^2 + 2\bar{u}_1^2 x_2^2)^{1/2}} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2(\bar{u}_2^2 x_1^2 + \bar{u}_1^2 x_2^2)} \right]. \quad (5.93)$$

Конечно, и в этом случае приходится учитывать ограничение, накладываемое условием малости времени диффузии $\tau \ll \mathcal{J}_L$. А это, в свою очередь, приводит к условию

$$\frac{x_1 \bar{U}_1}{\bar{u}_1^2 \left(\frac{x_1^2}{\bar{u}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{u}_2^2} \right)^{1/2}} \gg 1.$$

Тогда решение (5.93) упрощается:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{\sqrt{2\pi} (\bar{u}_2^2 x_1^2 + \bar{u}_1^2 x_2^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2(\bar{u}_2^2 x_1^2 + \bar{u}_1^2 x_2^2)} \right]. \quad (5.93a)$$

Если вновь принять условие $\bar{u}_1^2/\bar{U}_1^2 \ll 1$ и, следовательно, $x_2^2/x_1^2 \ll 1$, то получается еще более простое решение:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{\sqrt{2\pi} u'_2 |x_1|} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2u_2'^2 x_1^2}\right). \quad (5.93б)$$

Для продолжительного времени диффузии, вводя постоянные коэффициенты диффузии ϵ_{11} и ϵ_{22} , из (5.92) получаем

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi (\epsilon_{11} \epsilon_{22})^{1/2}} K_0 \left[\frac{1}{2} \bar{U}_1 \left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}^2} \right)^{1/2} \right] \exp\left(\frac{\bar{U}_1 x_1}{2\epsilon_{11}}\right), \quad (5.94)$$

где $K_0(z)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода.

Это решение можно упростить, если принять, что

$$\frac{\epsilon_{11}}{\bar{U}_1 x_1} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_2^2}{x_1^2} \ll 1.$$

Тогда получим следующий результат:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{2(\pi \epsilon_{22} \bar{U}_1 |x_1|)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1 x_2^2}{4\epsilon_{22}^2 |x_1|} \epsilon_{11}\right). \quad (5.94а)$$

Произведем сравнение (5.94) и (5.94а) с соответствующими выражениями (5.86) и (5.86а). Из формул (5.90), (5.91), (5.93) и (5.94) можно заключить, что при малой относительной интенсивности турбулентности диффузия происходит, по существу, только в поперечном направлении, тогда как при не очень малой относительной интенсивности турбулентности может стать существенной диффузия в направлении вверх по потоку. Однако в этом случае мы быстро приходим к противоречию с условием, накладываемым предположением о малом времени диффузии. Тем не менее, чтобы продемонстрировать заведомо преувеличенное влияние диффузии вверх по потоку, приведем рис. 5.2, заимствованный из работы Флайшмана и Френкиля [36]. На этом рисунке изображены кривые постоянной концентрации,

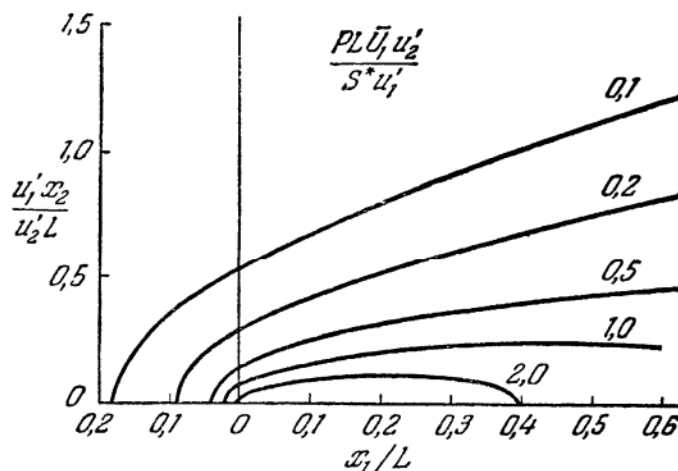


Рис. 5.2. Кривые постоянной концентрации по формуле (5.93) для малых расстояний при $u_2'/\bar{U}_1 = 0,5$ [36].

преувеличенное влияние диффузии вверх по потоку, приведем рис. 5.2, заимствованный из работы Флайшмана и Френкиля [36]. На этом рисунке изображены кривые постоянной концентрации,

вычисленные по формуле (5.93) для малых расстояний при относительной интенсивности $u'_2/\bar{U}_1 = 0,5$. При этом введены безразмерные координаты x_1/L и $u'_1 x_2/u'_2 L$, где L — характерная длина, а также безразмерный параметр $PL\bar{U}_1 u'_2/S^* u'_1$.

Весь предшествовавший анализ был посвящен исследованию диффузии меченых жидких частиц, определяемой только турбулентным движением, без учета влияния молекулярной диффузии. Поэтому решения, полученные для распределения концентрации $P(x_1, x_2, x_3)$, применимы только в том случае, когда в жидкость оказывается возможным ввести такое «трассирующее» вещество, которое не было бы подвержено молекулярной диффузии, например инородные частицы, имеющие одинаковую с жидкостью плотность. Они должны быть достаточно невелики, чтобы не оказывать влияния на турбулентное движение жидкости, но не слишком малы, ибо тогда пришлось бы иметь дело с броуновским движением. Представим себе, что имеется возможность экспериментировать с подобными инородными частицами. В таком случае значения $\bar{y}_i^2$, в принципе, можно было бы отыскать по распределению частиц, непрерывно вводимых в жидкость из неподвижного источника, и найти, следовательно, интенсивность турбулентности, лагранжев интегральный масштаб, коэффициент вихревой диффузии и даже лагранжеву корреляцию.

Рассмотрим, например, случай диффузии от линейного источника при однородной изотропной турбулентности с малой относительной интенсивностью. Тогда по распределению концентрации $P(x_1, x_2)$ вниз по потоку от источника можно определить среднеквадратичное значение $\bar{y}_2^2$ для поперечной турбулентной диффузии согласно соотношению

$$\bar{y}_2^2(x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 P(x_1, x_2) dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(x_1, x_2) dx_2}, \quad (5.95)$$

т. е. взяв нулевой и второй моменты распределения концентрации в некотором поперечном сечении на расстоянии x_1 от источника.

Подставляя решения (5.93б) и (5.94а) в (5.95) и выполняя интегрирование, соответственно получаем

$$\bar{y}_2^2 = \frac{\bar{u}_2^2 x_1^2}{\bar{U}_1^2} = \bar{u}_2^2 (t - t_0)^2 \quad \text{для малого интервала времени диффузии}$$

и

$$\bar{y}_2^2 = \frac{2\epsilon x_1}{\bar{U}_1} = 2\epsilon (t - t_0) \quad \text{для большого интервала времени диффузии,}$$

как это и должно быть. Таким образом, интенсивность турбулентности и коэффициент вихревой диффузии можно определить непосредственно по значениям $\overline{y_2^2}$ на малом и на большом расстояниях от источника.

Зная значения $\overline{y_2^2}$ на промежуточных расстояниях от источника, определенные по формуле (5.95), и располагая соотношением типа (1.77), можно получить лагранжев коэффициент корреляции R_L : $\overline{y_2^2}(x_1) =$

$$= 2 \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U_1^2}} \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1) R_L \left(\frac{\xi_1}{\overline{U_1}} \right) d\xi_1. \quad (1.77a)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает

$$\frac{d}{dx_1} \overline{y_2^2}(x_1) = 2 \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U_1^2}} \int_0^{x_1} R_L \left(\frac{\xi_1}{\overline{U_1}} \right) d\xi_1. \quad (5.96)$$

откуда

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{d}{dx_1} \overline{y_2^2}(x_1) &= 2 \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U_1}} \mathcal{J}_L = \\ &= 2 \frac{u_2'}{\overline{U_1}} \Lambda_L = \frac{2\epsilon}{\overline{U_1}}. \end{aligned} \quad (5.96a)$$

Дважды дифференцируя выражение (1.77a), получаем

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \overline{y_2^2}(x_1) = 2 \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U_1^2}} R_L \left(\frac{x_1}{\overline{U_1}} \right). \quad (5.97)$$

Если графически изобразить зависимость величины $\overline{y_2^2}$ от x_1 , то получим кривую, форма которой показана на рис. 5.3; здесь величина $\overline{y_2^2}$ возрастает вначале пропорционально x_1^2 , а затем — пропорционально x_1 , причем угловой коэффициент асимптоты к этой кривой равен $2u_2'\Lambda_L/\overline{U_1}$. Точка пересечения x_1^* асимптоты к этой кривой с осью x_1 , согласно соотношению (1.77a), определяется формулой

$$x_1^* = \frac{u_2'}{\overline{U_1}\Lambda_L} \int_0^\infty \xi_1 R_L \left(\frac{\xi_1}{\overline{U_1}} \right) d\xi_1. \quad (5.98)$$

Уравнение этой асимптоты имеет вид

$$\overline{y_2^2} = 2 \frac{u_2'}{\overline{U_1}} \Lambda_L (x_1 - x_1^*) = 2 \frac{\epsilon}{\overline{U_1}} (x_1 - x_1^*). \quad (5.99)$$

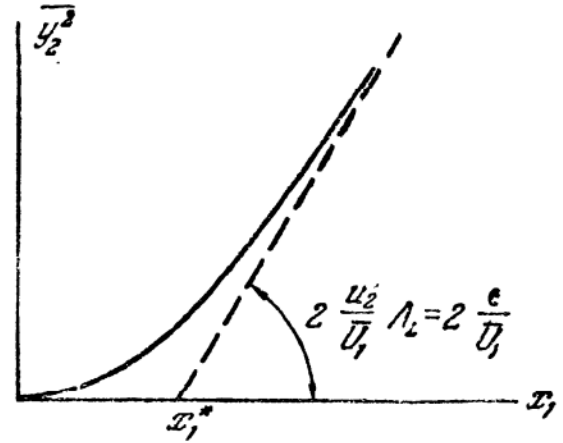


Рис. 5.3. Зависимость среднеквадратичной величины $\overline{y_2^2}$ для поперечной диффузии частиц при изотропной турбулентности от расстояния x_1 до неподвижного точечного источника.

Различными экспериментаторами делались попытки определить характеристики однородной и почти изотропной турбулентности, следуя только что описанному методу. Большинство из них использовали в качестве трассирующего вещества либо краску, растворенную в жидкости, либо ее нагревание. Так как на диффузию краски или тепла наверняка влияет молекулярная диффузия, то эти измерения

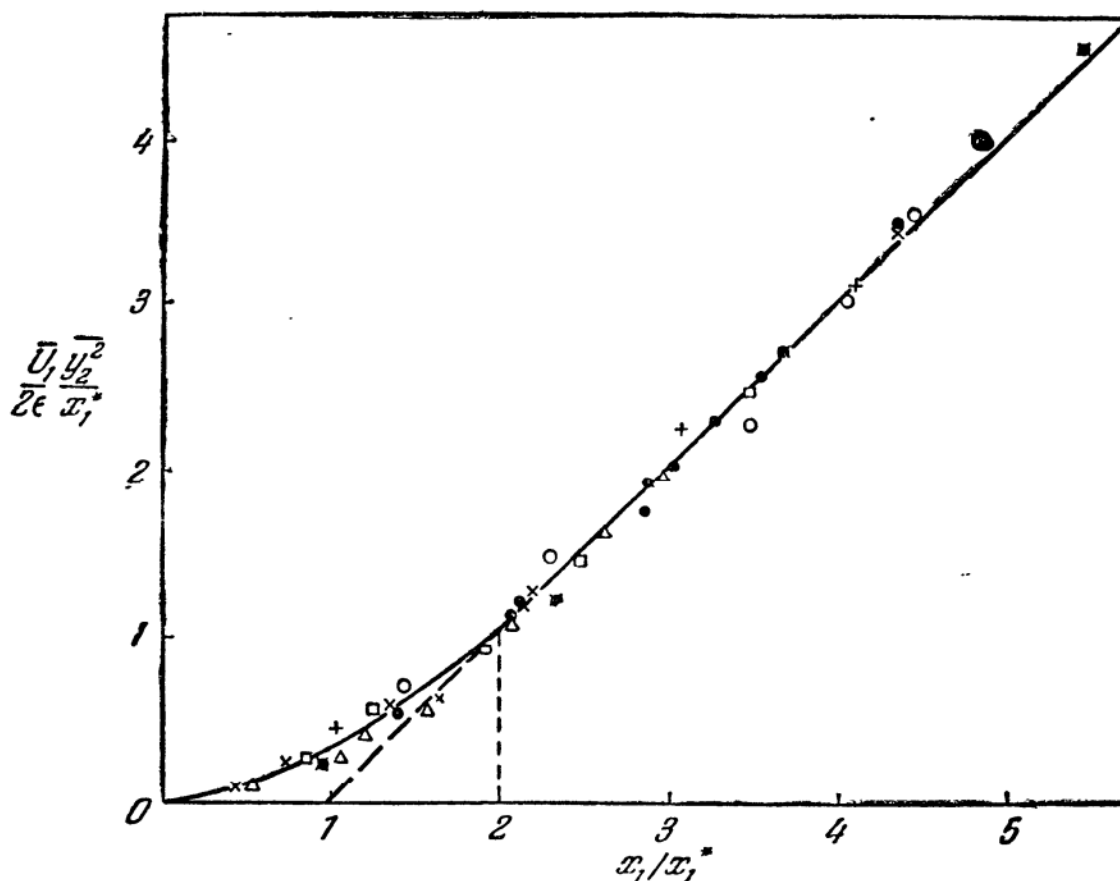


Рис. 5.4. Поперечная диффузия капель смеси бензол — четыреххлористый углерод в турбулентном потоке воды вниз по течению от точки впрыска [38].

параметров диффузии нельзя использовать для определения характеристик турбулентности, особенно лагранжевой корреляции. Кампе де Ферье [37] описывает опыты по диффузии, проведенные Дюпюи в аэродинамической трубе, в которых использовались мыльные пузырьки с диаметром около 3 мм, вводившиеся в некоторой точке в воздушный поток в аэродинамической трубе. Было обнаружено, что концентрация пузырьков, проходящих через плоскость, перпендикулярную к осредненному потоку, подчиняется распределению Гаусса.

Калинске и Пян [38] провели опыты по диффузии в воде, протекающей по лотку. На некотором расстоянии от дна и боковых стенок турбулентное течение было почти изотропным. Вводя в поток смесь четыреххлористого углерода с бензолом, имеющую одинаковую

с водой плотность и образывавшую в воде мелкие капли, эти исследователи определяли затем значения $\overline{y_2^2}$ по фотографическим снимкам. Распределение концентрации капель, проходящих через плоскость, перпендикулярную к потоку, на расстоянии x_1 от точки подвода смеси было очень близко к распределению Гаусса:

$$P(x_1, x_2) = P(x_1, 0) \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\overline{y_2^2}}\right).$$

Если считать, что капли достаточно малы по сравнению с наименьшим масштабом турбулентности, то в этом случае их диффузию можно рассматривать как такую диффузию жидких частиц, которая обусловлена только турбулентностью, ибо молекулярные эффекты не оказывают влияния на диффузию капель.

Вычисляя значения $\overline{y_2^2}$ по распределению смеси в поперечных сечениях потока на различных расстояниях от источника, можно определить зависимость $\overline{y_2^2}$ от x_1 . По кривой, изображающей эту зависимость, при малых значениях x_1 определяется интенсивность турбулентности $\overline{u_2^2}/\overline{U_1^2} = \overline{y_2^2}/x_1^2$, а при больших значениях x_1 — величина $\epsilon = \overline{y_2^2}\overline{U_1}/2x_1$. Применяя далее соотношение (5.97), определяют лагранжеву корреляцию $R_L(x_1/\overline{U_1})$. На рис. 5.4 показана кривая зависимости величины $\overline{y_2^2}\overline{U_1}/2\epsilon$ от x_1/x_1^* .

Оказалось, что приближенная форма зависимости коэффициента лагранжевой корреляции неплохо аппроксимируется экспоненциальной функцией

$$R_L = \exp\left(-\frac{x_1}{a}\right),$$

где

$$a = \int_0^\infty R_L(x_1) dx_1 = \overline{U_1} \mathcal{J}_L = \frac{\overline{U_1}}{u_2'} \Lambda_L = \frac{\overline{U_1}}{u_2^2} \epsilon.$$

Заменяя R_L в (5.98) этой экспоненциальной функцией, получаем

$$x_1^* = \frac{u_2'}{\overline{U_1} \Lambda_L} a^2 = a.$$

Следовательно, если лагранжева корреляция описывается экспоненциальной функцией, то

$$R_L = \exp\left(-\frac{x_1}{x_1^*}\right),$$

откуда

$$\overline{y_2^2} = \frac{2\epsilon x_1^*}{\overline{U_1}} \left\{ \frac{x_1}{x_1^*} - \left[1 - \exp\left(-\frac{x_1}{x_1^*}\right) \right] \right\}.$$

Но поскольку $\exp(-2) = 0,135$, то при таком представлении лагранжевой корреляции величина $\overline{y}_2^2$ при $x_1 > 2x_1^*$ примерно соответствует значению, определяемому асимптотической формулой (5.99). Анализ рис. 5.4 показывает, что, учитывая обычный разброс экспериментальных точек, эту аппроксимацию можно считать вполне оправданной.

Рассмотрим теперь влияние молекулярной диффузии на распространение, скажем, тепла вниз по потоку от линейного источника, помещенного в однородном турбулентном потоке, имеющем равномерную осредненную скорость $\overline{U}_1$.

Согласно исследованиям Таунсенда [39], а также Бэтчелора и Таунсенда [25], можно различить три стадии развития теплового следа вниз по потоку от источника тепла. На протяжении первых двух стадий след состоит из непрерывного связного слоя, который с увеличением расстояния от источника тепла становится все более и более искривленным. На первой стадии жидкие частицы, проходящие мимо теплового источника и отбирающие от него тепло, образуют тонкую плену, толщина которой может считаться малой по сравнению с микромасштабом турбулентности. Эта пленка под действием крупномасштабных движений раскачивается вверх и вниз и в то же время, благодаря мелкомасштабным движениям за счет молекулярной диффузии, все больше деформируется. Толщина этой пелены увеличивается. Среднеквадратичное значение ширины следа возрастает по времени пропорционально $2f_\theta(t - t_0)$, где t_0 обозначает тот момент времени, когда жидкие частицы минуют источник тепла. Полное распространение тепла определяется молекулярной диффузией и воздействием турбулентности, крупномасштабные движения которой вызывают поперечные перемещения нагретой пелены. Среднеквадратичное значение $(y_2)_\theta^2$ для распределения температуры определяется формулой

$$\overline{(y_2)_\theta^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 \overline{\Theta}(t, x_2) dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Theta}(t, x_2) dx_2} = \overline{y}_2^2 + 2f_\theta(t - t_0),$$

так как на этой стадии диффузия благодаря молекулярным эффектам и распространение под действием турбулентности статистически не зависят друг от друга и поэтому обе эти составляющие в общей дисперсии аддитивны. Это, однако, справедливо лишь постольку, поскольку деформации пелены, вызываемые мелкомасштабными движениями, не оказывают влияния на ускорение молекулярной диффузии благодаря процессу растяжения жидких элементов. Это условие удовлетворяется лишь в том случае, когда время диффузии $t - t_0$

мало по сравнению с временным масштабом наименьших вихрей, который при больших числах Рейнольдса турбулентности определяется величиной $(\nu/\epsilon)^{1/2}$.

Можно принять еще также условие, что распространение под действием молекулярной диффузии должно быть мало по сравнению с размерами наименьших вихрей, т. е. по сравнению с величиной $\nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$. Отсюда

$$f_0(t - t_0) \ll \nu^{3/2} \epsilon^{-1/2},$$

или

$$(t - t_0) \left(\frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2} \ll \frac{\nu}{f_0} = \text{Pr}.$$

На второй стадии важное значение приобретает искривление нагретой пелены наиболее мелкими вихрями. Влияние турбулентности приводит не только к смещению жидких частиц, но также и к растяжению и вращению жидких элементов. На молекулярную диффузию оказывают влияние только два последних процесса: они способствуют ее ускорению.

Бэтчелор и Таунсенд произвели оценку этого ускорения путем анализа молекулярной диффузии от произвольного элемента нагретой пелены, когда она одновременно растягивается и вращается, в предположении о том, что скорости растяжения и вращения остаются равномерными в течение интервала времени $t - t_0$, будучи также равномерными в поперечном сечении пелены. Эти скорости определяются завихренностью турбулентности $\omega_k = \epsilon_{ijk} \partial u_j / \partial x_i$. Предположив, далее, наличие локальной изотропности, Бэтчелор и Таунсенд пришли к следующему выражению для полного распространения:

$$\overline{(y_2)_0^2} = \overline{y_2^2} + 2f_0(t - t_0) + \frac{28}{45} f_0 \overline{\omega_k \omega_k} (t - t_0)^3,$$

или, поскольку при изотропной турбулентности $\overline{\omega_k \omega_k} = \epsilon/\nu$,

$$\overline{(y_2)_0^2} = \overline{y_2^2} + 2f_0(t - t_0) + \frac{28}{45} f_0 \frac{\epsilon}{\nu} (t - t_0)^3.$$

Это выражение можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\overline{(y_2)_0^2}}{M^2} = \frac{\overline{y_2^2}}{M^2} + \frac{2}{\text{Pr}} \frac{\nu}{M \bar{U}_1} \frac{\bar{U}_1(t - t_0)}{M} + \frac{28}{45} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\epsilon M}{\bar{U}_1^3} \frac{\bar{U}_1^3(t - t_0)^3}{M^3}, \quad (5.100)$$

где M — масштаб длины, например размер ячейки турбулизирующей решетки.

Второй член в правой части этого уравнения, непосредственно характеризующий роль молекулярной диффузии, показывает, что при заданном расстоянии вниз по потоку от источника

$$x_1 - x_{1,0} = \bar{U}_1(t - t_0)$$

роль молекулярной диффузии с увеличением $Re_M = \bar{U}_1 M/\nu$ ослабевает. Этого и следовало ожидать, поскольку в данном случае с увеличением Re_M возрастает скорость $\bar{U}_1$, так что время диффузии $t - t_0$ уменьшается.

Третий член в правой части, который характеризует роль ускоренной молекулярной диффузии, по-видимому, не зависит от Re_M . Этот факт представляется довольно странным, но при этом надо иметь в виду, что толщина пелены, измеренная в направлении оси x_2 , т. е. перпендикулярно к исходной плоскости пелены, при увеличении Re_M остается неизменной благодаря совокупности эффектов растяжения и вращения элементов пелены. Этот результат, касающийся взаимодействия между турбулентной диффузией и молекулярной диффузией, по-видимому, подтверждается опытами, проведенными Таунсендом [39].

Те же опыты Таунсенда показали, что на третьей стадии уже нельзя более говорить о непрерывной связной пелене нагретой жидкости. Искривление становится уже настолько сильным, что дисперсия образуется большим числом практически дискретных жидких элементов, группирующихся в большей или меньшей степени около исходной плоскости невозмущенной пелены (плоскости симметрии). Эта стадия наступает при $(t - t_0)/t_0 \gg 1$. Опыты Таунсенда и аналогичные опыты Юбероя и Корсина [28] показали, что при этом величина $\overline{(y_2)_0^2}$ линейно возрастает с увеличением $t - t_0$. А это должно было бы иметь место в том случае, когда распространение тепла обуславливается процессом диффузии при постоянном коэффициенте диффузии. В этом случае должно было бы выполняться также условие $t - t_0 \gg (\mathcal{J}_L)_0$, где $(\mathcal{J}_L)_0$ — лагранжев интегральный масштаб времени для распространения тепла.

Искривление отдельных нагретых жидких элементов под действием турбулентных движений будет продолжаться, и поэтому они будут испытывать влияние процесса ускоренной молекулярной диффузии. Непрерывные потери тепла в окружающую среду при перемещении жидких элементов проявляются в уменьшении эффективного коэффициента диффузии тепла относительно коэффициента диффузии жидких частиц. Для сравнения следует обратиться к выражению (5.39) для коэффициента диффузии.

Рассматривая явление, три стадии которого были только что описаны, можно прийти к выводу, что влияние молекулярной диффузии на полное распространение тепла на протяжении первых двух стадий отличается от этого влияния на третьей стадии. В то время как в ходе первых двух стадий, когда нагретые жидкие элементы все еще образуют связный (хотя и искривленный) слой, молекулярная диффузия усиливает распространение тепла, на третьей и последней

стадии, когда образуются дискретные элементы нагретой жидкости, молекулярная диффузия ослабляет распространение тепла.

Следовательно, сравнивая на одном и том же графике распространение тепла $(\overline{y_2})_0^2$ с распространением жидких частиц $\overline{y_2}^2$, мы должны были бы получить результат, изображенный на рис. 5.5.

Выше было показано, что если коэффициент лагранжевой корреляции для диффузии жидких частиц можно представить в виде экспоненциальной функции, то расстояние, на котором величина $\overline{y_2}^2$ почти одинакова с расстоянием, определяемым асимптотой к кривой $(\overline{y_2}^2, x_1)$, приблизительно равно $2x_1^*$. Для кривой $[(\overline{y_2})_0^2, x_1]$ этот вывод уже не является справедливым. Соответствующее расстояние оказывается значительно больше, чем $2(x_1^*)_0$, так как эта кривая становится более пологой.

Описанное влияние молекулярной диффузии еще раз ясно показывает, что из опытов по диффузии, в которых диффундирующая субстанция подвержена воздействию молекулярно-диффузионных эффектов, невозможно получить надежные данные о коэффициенте лагранжевой корреляции R_L и коэффициенте диффузии ϵ жидких частиц. Поскольку, как следует из соотношения (5.100), эти молекулярные эффекты пропорциональны Pr^{-1} , то при больших значениях Pr указанная ошибка становится меньше.

Правда, из этих опытов по диффузии оказывается все же возможным определить величину ϵ_γ .

Имеется также возможность определить по результатам этих опытов величину $\overline{y_2}^2$ и, следовательно, $\overline{v_2}^2$, правда, при условии, что рассматривается только малое время диффузии; а стало быть, (1) $t - t_0 \ll \mathcal{J}_L$ и существует идеальная корреляция ($R_L \approx 1$) и (2) процесс диффузии находится еще в первой стадии. Хотя на этой первой стадии и можно внести в расчет поправку на влияние молекулярной диффузии, все же для того, чтобы необходимая поправка была минимальной, следует рекомендовать большие значения Pr .

На рис. 5.6 изображены результаты опытов Таунсенда [39] по диффузии тепла вниз по течению от линейного источника, помещенного в поток с однородной турбулентностью, которая создавалась

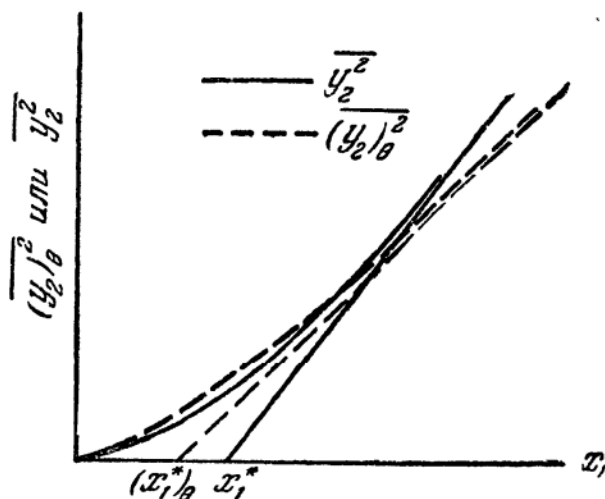


Рис. 5.5. Сравнение поперечной диффузии тепла с диффузией жидких частиц вниз по потоку от теплового источника.

в аэродинамической трубе с помощью решетки с квадратными ячейками ($M = 1,27$ см, $\bar{U}_1 = 640$ см/сек). Сравнение диффузионной кривой на этом рисунке с кривой, изображенной на рис. 5.4, наглядно показывает различие, о котором уже говорилось; это иллюстрируется также и кривыми на рис. 5.5.

Большинство опытов по диффузии при однородной турбулентности проводилось в поле приблизительно изотропного турбулентного потока за решеткой. Теперь мы знаем, что это поле турбулентного течения с увеличением расстояния от решетки вырождается. Это вырождение — относительно медленный процесс по сравнению

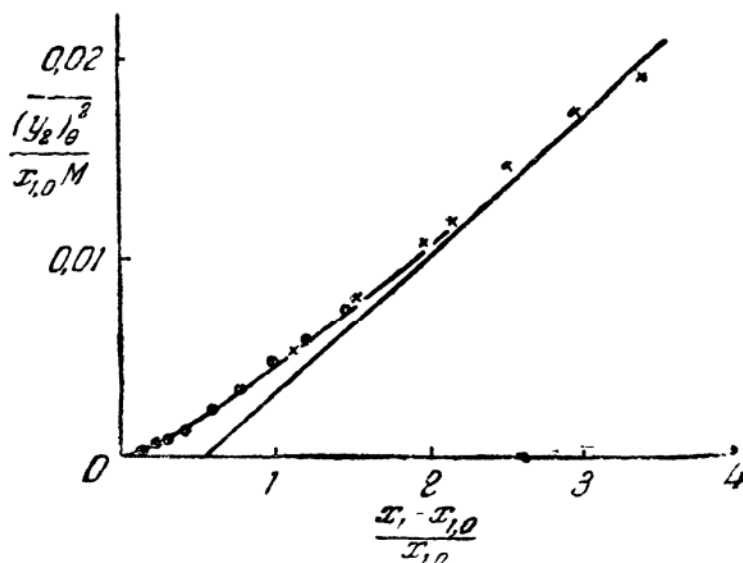


Рис. 5.6. Поперечная диффузия тепла вниз по потоку от линейного источника при однородной турбулентности [39].

с временным масштабом турбулентных пульсаций; следовательно, предположение об однородности поля, по-видимому, удовлетворяется в зонах, протяженность которых не превосходит, по крайней мере, в несколько раз интегрального масштаба турбулентности. Свойства различных величин, например корреляций скорости, основанные на предположении о пространственной однородности, тем не менее сохраняются.

Все же при проведении опытов по диффузии при вырождающейся изотропной турбулентности, особенно в случае большого времени диффузии, полностью пренебречь влиянием процесса вырождения нельзя, так как масштабы времени и длины изменяются с расстоянием от решетки, а следовательно, изменяются также и в течение процесса диффузии вниз по потоку от неподвижного источника.

Пусть этот источник расположен на расстоянии x_0 от решетки. Если время отсчитывать от того момента, когда жидкость проходит через решетку, то жидкость достигнет неподвижного источника

в момент времени $t_0 = x_0/\bar{U}_1$. Поперечная диффузия жидких частиц, проходящих мимо источника, определится тогда выражением

$$\bar{y}_2^2(t) = 2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \overline{v_2(t') v_2(t'')} dt'' = 2 \int_{t_0}^t dt' \int_0^{t'-t_0} \overline{v_2(t') v_2(t' - \tau)} d\tau.$$

Если ввести коэффициент лагранжевой корреляции

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_2(t) v_2(t - \tau)}}{v_2'(t) v_2'(t - \tau)},$$

то следует иметь в виду, что теперь, вследствие процесса вырождения, $v_2'(t) \neq v_2'(t - \tau)$.

Таким образом,

$$\bar{y}_2^2(t) = 2 \int_{t_0}^t v_2'(t') dt' \int_0^{t'-t_0} v_2'(t' - \tau) R_L(\tau) d\tau,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{y}_2^2(t) = v_2'(t) \int_0^{t-t_0} v_2'(t - \tau) R_L(\tau) d\tau.$$

Это соотношение можно выразить через расстояние x_1 , которое, будучи отнесенным к размеру ячейки решетки M , превращается в безразмерную величину:

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{y}_2^2}{M dx_1} = \frac{1}{\bar{U}_1^2 M} v_2' \left(\frac{x_1 - x_0}{M} \right) \int_0^{(x_1 - x_0)/M} v_2' \left(\frac{x_1 - \xi_1}{M} \right) R_L \left(\frac{\xi_1}{M} \right) d\xi_1. \quad (5.101)$$

Экспериментальные данные показывают, что, в пределах точности измерений, величина $v_2'/\bar{U}_1$ почти не зависит от $\bar{U}_1$ и является функцией только x_1/M . Ширина теплового следа вниз по потоку от источника тепла также является функцией только расстояния от источника тепла и не зависит от $\bar{U}_1$. Этот результат привел Тэйлора [40] к предположению о том, что процесс диффузии зависит только от переменной η , которая определяется следующим выражением:

$$d\eta = \frac{v_2'}{\bar{U}_1 M} dx_1.$$

Тогда получаем

$$\frac{1}{2M^2} \frac{d\bar{y}_2^2}{d\eta} = \int_0^\eta R_L(\eta') d\eta'$$

и

$$\frac{1}{2M^2} \frac{d^2 \bar{y}_2^2}{d\eta^2} = R_L(\eta).$$

Можно воспользоваться и другим экспериментальным фактом, а именно тем, что на начальной стадии процесса вырождения масштаб длины турбулентности возрастает почти пропорционально $t^{1/2}$, а масштаб скорости убывает приблизительно пропорционально $t^{-1/2}$. Следовательно, масштаб времени увеличивается пропорционально t . В соответствии с этим Бэтчелор и Таунсенд [25] полагают, что диффузия от неподвижного источника при вырождающейся турбулентности, созданной с помощью решетки, должна быть стационарной случайной функцией новой переменной t^* , для которой

$$dt^* = \frac{dt}{t}, \quad \text{или} \quad t^* = \ln \frac{t}{t_1},$$

где величина t_1 произвольна.

Выраженные через эту новую переменную уравнения диффузии жидких частиц принимают вид

$$\frac{\overline{y_2^2}}{M^2} = 2 \frac{v_2'^2(t_0) t_0 t_1}{M^2} \int_{\ln(t_0/t_1)}^{\ln(t/t_1)} \exp(t'^*) dt'^* \int_0^{t'^* + \ln(t_0/t_1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \tau^*\right) R_L(\tau^*) d\tau^* \quad (5.102)$$

и

$$\frac{1}{2M^2} \frac{d\overline{y_2^2}}{d(t/t_0)} = \frac{v_2'^2(t_0) t_0^2}{M^2} \int_0^{\ln(t/t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2} \tau^*\right) R_L(\tau^*) d\tau^*.$$

Поскольку величина $v_2'^2(t_0) t_0$ для данной решетки постоянна, правые части этих уравнений, по-видимому, становятся функциями соответственно только t/t_0 и $t_0 f(t/t_0)$. Эти уравнения показывают, далее, что при продолжительном времени диффузии распространение $\overline{y_2^2}$, несмотря на вырождение турбулентности, линейно возрастает по времени.

Если проанализировать уравнение (5.100) для диффузии тепла на второй стадии диффузии совместно с выписанными выше выражениями для $\overline{y_2^2}$, то можно прийти к выводу, что распространение тепла тоже определяется функцией вида $t_0 f(t/t_0)$. Опыты Таунсенда по распространению тепла показали, что это, по-видимому, справедливо также и для всех значений $(t - t_0)/t_0$, как это оказалось и в случае распространения $\overline{y_2^2}$ жидких частиц (см. рис. 5.6).

В 1939 году Таул и Шервуд [41] опубликовали результаты опытов, проведенных на круглой трубе с диаметром 30 см. Они вводили углекислый газ и водород через тонкую трубку, расположенную на оси трубы, и измеряли концентрацию в поперечных сечениях потока на больших расстояниях от источника путем непрерывного отбора пробы с помощью гребенки из тонких трубок. Таул и Шер-

вуд исследовали влияние турбулентности, созданной решеткой ($M = 1,27$ см, $M/d = 6$), установленной на различных расстояниях вверх по потоку от источника. Расстояния между источником и поперечными сечениями, в которых проводилось измерение концентрации, были достаточно велики, чтобы оправдывалось предположение о постоянстве коэффициента вихревой диффузии. Коэффициент вихревой диффузии определялся по распределениям концентрации, которые были близки к гауссовой кривой ошибок, методом, описанным в § 2.10 и основанным на использовании уравнения (5.85а). Никаких поправок, учитывающих влияние молекулярной диффузии или вырождение турбулентности, созданной решетками, не вносилось. В связи с этим необходимо упомянуть о следующем факте: многие измерения производились на столь больших расстояниях между источником и решеткой (более чем $600M$), что турбулентность за решеткой, вероятно, находилась уже на конечной стадии вырождения. Однако эти результаты интересны в том отношении, что они ясно указали на заметное увеличение коэффициента вихревой диффузии, когда расстояние между источником и решеткой было в 25 раз больше диаметра трубы; при этом достигалось постоянное значение, близкое к тому, которое было получено при отсутствии решетки на расстояниях, превышающих 50 диаметров трубы. Очевидно, масштаб турбулентности невозмущенного потока в трубе при отсутствии решетки был намного больше, нежели масштаб турбулентности, созданной с помощью решетки, благодаря чему коэффициент вихревой диффузии при наличии решетки в потоке оказался значительно меньше.

Аналогичные результаты были получены Маккартером, Штуцманом и Кохом [42] в опытах, проводившихся на вертикально расположенной трубе с диаметром 20 см. Через стеклянную трубку с внутренним диаметром 1,9 см, помещенную на оси трубы на расстоянии 125 см от входа в нее, в поток вводился нагретый воздух. Измерение температуры осуществлялось с помощью медноконстантановых термопар, изготовленных из весьма тонких проволок. Недалеко вверх по потоку от места подвода нагретого воздуха устанавливались решетки с 8 и 40 ячейками на 1 дюйм. Влиянием молекулярной диффузии и вырождения турбулентности пренебрегалось. Предполагалось, что коэффициент вихревой диффузии ϵ_v постоянен, а его значение определялось по экспериментальным профилям температуры, которые по форме очень близки к соответствующим гауссовым кривым ошибок.

Как и в опытах Таула и Шервуда, коэффициенты вихревой диффузии при наличии решетки в потоке были значительно меньше, чем при ее отсутствии, причем эта разница была больше для решетки с 40 ячейками на 1 дюйм, в случае которой величина ϵ_v составляла приблизительно половину от своего значения, найденного для

невозмущенного потока в трубе. Далее, был сделан вывод о том, что значения ϵ_τ для невозмущенного потока в трубе приблизительно равны значениям, которые получаются по эмпирической формуле, предложенной Шервудом и Вёрцем [43]:

$$\epsilon_\tau = 0,02 \bar{U}_{\text{ср}} D \sqrt{\lambda},$$

где $\bar{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость потока в трубе, D — диаметр трубы, а λ — коэффициент трения о стенку, определяемый из соотношения для градиента давления:

$$-\frac{d\bar{P}}{dx} = \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{U}_{\text{ср}}^2.$$

По результатам этих опытов, а также по данным экспериментального исследования, проведенного Таулом и Шервудом, можно заключить, что введение решетки с целью повышения суммарной скорости перемешивания не всегда может служить этой цели. Такая решетка не должна иметь слишком мелкие ячейки, потому что уменьшение коэффициента вихревой диффузии, вследствие сокращения масштаба турбулентности, зачастую перекрывает по величине возросшую интенсивность турбулентности.

§ 5.6. Диффузия от неподвижного источника в турбулентном потоке со сдвигом

В предыдущем параграфе предполагалось, что рассматриваемый турбулентный поток обладает равномерной осредненной скоростью, а турбулентность является однородной. В этом случае кривые распределения концентрации оказываются симметричными относительно некоторой оси (при точечном источнике) или относительно некоторой плоскости (при линейном источнике). Но если осредненная скорость не равномерна, а зависит от пространственных координат, то можно, по-видимому, полагать, что симметрии у кривых распределения концентрации наблюдаться уже не будет. В общем случае форма этих кривых распределения будет определяться характеристиками турбулентности и распределением осредненной скорости в пространстве. Если, однако, рассматривать только малое время диффузии, иными словами, диффузию на небольших расстояниях от источника, то форма кривой распределения концентрации может определяться в основном локальным распределением осредненной скорости и локальной турбулентностью в непосредственной близости от источника.

Самым простым случаем турбулентного потока со сдвигом является тот, в котором поток со сдвигом — стационарный и однородный, а именно параллельный поток с постоянным градиентом

осредненной скорости в направлении, перпендикулярном к этой скорости:

$$\bar{U}_1 = \text{const } x_2, \quad \bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0.$$

Представим себе, что некоторый линейный источник помещен перпендикулярно к осредненной скорости и к направлению ее градиента. Тогда распределение диффундирующего вещества вниз по потоку от источника будет асимметричным. Подобная асимметрия действительно наблюдалась в опытах Скрэмстеда [44] с турбулентным пограничным слоем, Корсина и Юбероя [45] — с турбулентной зоной смещения круглой свободной струи, а также Хинце и Ван дер Хегге Цийнена [46] — с турбулентной зоной смещения плоской свободной струи. В качестве линейного источника тепла все эти экспериментаторы использовали тонкую нагретую проволочку. Характер указанной асимметрии был таков, что большее распространение в поперечном направлении наблюдалось на стороне более высокой осредненной скорости.

Если бы это распространение можно было описать с помощью некоторого постоянного коэффициента вихревой диффузии, то влияние градиента осредненной скорости привело бы к асимметрии в совершенно противоположном направлении по сравнению с тем, которое действительно наблюдалось в опытах. Этот эффект можно объяснить следующим образом. В общем случае поперечное распространение на данном расстоянии от источника определяется тем временем, которое необходимо потоку, чтобы покрыть это расстояние. Но это время короче для той стороны, где скорость потока больше, и наоборот. Следовательно, поперечное распространение будет более узким со стороны большей осредненной скорости и более широким со стороны меньшей осредненной скорости.

Математически эта задача была решена Ловерье [47]. В качестве исходного соотношения он использовал уравнение диффузии под действием конвекции

$$\bar{U}_{1,0} (1 + ax_2) \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_2} = \epsilon_\gamma \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial x_2^2}$$

и принял, что $\bar{\Gamma} = 0$ в плоскости $x_2 = -1/a$. Решение Ловерье имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} = \frac{S_0}{3ax_1} (1 + ax_2)^{1/2} I_{1/3} \left[\frac{2}{9} \bar{U}_{1,0} \frac{(1 + ax_2)^{3/2}}{a^2 \epsilon_\gamma x_1} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{9} \bar{U}_{1,0} \frac{1 + (1 + ax_2)^3}{a^2 \epsilon_\gamma x_1} \right], \quad (5.103) \end{aligned}$$

где S_0 — интенсивность источника, а $I_{1/3}$ — бесселева функция порядка $1/3$. Распределение $\bar{\Gamma}$, определяемое формулой (5.103), обладает именно такой асимметрией, которая описана выше.

В практических случаях, когда, например, измеряется распределение температуры за нагретой проволокой, размер этой проволоки должен быть пренебрежимо мал по сравнению с размерами области турбулентного течения; тогда диффузия в поперечном направлении будет ограничена расстояниями, на которых изменение осредненной скорости $\bar{U}_1$ происходит лишь на весьма малую величину. Следовательно, асимметрия распределения температуры будет очень мала.

Предположение о постоянном коэффициенте вихревой диффузии встречает формальное возражение в связи с невозможностью увязать интегральный масштаб с однородной турбулентностью в потоке с поперечным сдвигом, как это было объяснено в главе 4. Следовательно, не представляется также возможным увязать с этой турбулентностью понятие о постоянном коэффициенте вихревой диффузии, который тогда можно было бы выразить через интегральный масштаб и интенсивность турбулентности.

Но помимо этого формального возражения имеются еще и другие, более сильные аргументы, которые лишают решение (5.103) какой-либо практической ценности для анализа процессов диффузии в турбулентных потоках.

Во-первых, если не все, то по крайней мере большинство турбулентных потоков лишь приближенно обладает постоянным градиентом распределения осредненной скорости и то лишь в зонах, которые заведомо невелики по сравнению с интегральным масштабом турбулентности. Значит, нельзя представить такого реального случая, в котором большие, сравнительно с лагранжевым интегральным масштабом, интервалы времени диффузии могли бы рассматриваться без учета присущего этому случаю изменения градиента осредненной скорости.

Во-вторых, относительная интенсивность турбулентности в потоке с поперечным сдвигом обычно не является малой. Например, турбулентное распространение тепла от тонкой проволоки в пределах интегрального масштаба турбулентности уже настолько велико, что увеличение температуры вне этого масштаба составляет лишь очень небольшую часть от начальной избыточной температуры, имеющей место в непосредственной окрестности нагретой проволоки, которую вряд ли можно измерить с приемлемой точностью. Следовательно, измерения должны ограничиваться областью интегрального масштаба. Это условие выполнялось в опытах Скрэмстеда, Корсина и Юбероя, а также Хинце и Ван дер Хегге Цийнена, которые получили линейное увеличение распространения с расстоянием.

Картина развития процесса диффузии в непосредственной близости от источника, в пределах интегрального масштаба турбулентности, отличается от соответствующей картины, наблюдаемой на большем расстоянии. Хинце [18] показал, что представление об этой

картине можно получить, если рассмотреть столь короткие расстояния, при которых в последовательные моменты времени наблюдается идеальная корреляция между скоростями жидких частиц, проходящих мимо источника. Следовательно, предположим, что в течение рассматриваемого времени диффузии t коэффициент лагранжевой корреляции $R_L(t) \approx 1$. Тогда, согласно соотношению (1.78), имеем

$$\overline{y_2^2}(t) = v_2'^2 t^2.$$

Такой же результат получается и в том случае, когда для перемещения жидкой частицы принимают

$$y_2(t) = \int_0^t v_2(\tau) d\tau \approx v_2(0) t = u_2(0) t,$$

пренебрегая, таким образом, в разложении функции $v_2(t)$ членами более высоких порядков:

$$v_2(t) = v_2(0) + \left[\frac{dv_2}{dt} \right]_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 v_2}{dt^2} \right]_{t=0} t^2 + \dots$$

С той же степенью приближения можно для перемещения жидкой частицы в осевом направлении принять зависимость

$$y_1(t) \approx [\bar{U}_1 + u_1(0)] t.$$

Здесь $\bar{U}_1$ — осредненная скорость в точке, где расположен источник.

Обратимся теперь к распределению меченых жидких частиц, миновавших источник, в плоскости, расположенной на расстоянии x_1 от этого источника. Это распределение имеет тот же вид, что и распределение $y_2(x_1)$ при заданном x_1 ; требуется отыскать плотность вероятности величины $y_2(x_1)$. Согласно сказанному выше,

$$x_1 = [\bar{U}_1 + u_1(0)] t, \quad \text{или} \quad t = x_1 / [\bar{U}_1 + u_1(0)],$$

значит,

$$y_2(x_1) = \frac{u_2(0)}{\bar{U}_1 + u_1(0)} x_1. \quad (5.104)$$

Если $u_1(0)/\bar{U}_1 \ll 1$, то распределения плотности вероятности величин $y_2(x_1)$ и $u_2(0)$, т. е. $v_2(0)$, идентичны. Но если относительная интенсивность турбулентности не так мала, то эта идентичность уже не наблюдается. В самом деле, часто оказывается, что асимметрия распределения $\bar{\Gamma}$, т. е. — если пренебречь молекулярными эффектами — распределения y_2 в плоскости на расстоянии x_1 , не только значительно больше, чем у распределения v_2 , но может даже иметь противоположный характер. Это наблюдается, например, в случаях, которые описаны ниже.

Из уравнения (5.104) можно получить различные соотношения, имеющие важное значение. Примем, прежде всего, в качестве

среднего значения y_2 то, которое получено путем осреднения по большому числу частиц, миновавших источник в последовательные моменты времени t_0 :

$$\bar{y}_2(x_1) = \frac{x_1}{T} \int_0^T \frac{u_2(t_0)}{\bar{U}_1 + u_1(t_0)} dt_0.$$

Пусть $u_1(t_0)/\bar{U}_1 < 1$, так что величину $(1 + u_1/\bar{U}_1)^{-1}$ можно разложить в ряд Тэйлора:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}_2(x_1)}{x_1} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_2(t_0)}{\bar{U}_1} \left[1 - \frac{u_1(t_0)}{\bar{U}_1} + \frac{u_1^2(t_0)}{\bar{U}_1^2} - \dots \right] dt_0 = \\ &= -\frac{\overline{u_1 u_2}}{\bar{U}_1^2} + \frac{\overline{u_1^2 u_2}}{\bar{U}_1^3} - \frac{\overline{u_1^3 u_2}}{\bar{U}_1^4} + \dots \end{aligned} \quad (5.105)$$

Аналогичным способом определяются и средние значения квадрата и куба величины y_2 для большого числа частиц:

$$\frac{\bar{y}_2^2}{x_1^2} = \frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}_1^2} - 2 \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\bar{U}_1^3} + 3 \frac{\overline{u_1^2 u_2^2}}{\bar{U}_1^4} - \dots \quad (5.106)$$

и

$$\frac{\bar{y}_2^3}{x_1^3} = \frac{\overline{u_2^3}}{\bar{U}_1^3} - 3 \frac{\overline{u_1 u_2^3}}{\bar{U}_1^4} + 6 \frac{\overline{u_1^2 u_2^3}}{\bar{U}_1^5} - \dots \quad (5.107)$$

Из двух последних соотношений легко можно определить коэффициент асимметрии S_{y_2} распределения y_2 . Коэффициент асимметрии определяется формулой

$$S_{y_2} = \frac{\bar{y}_2^3}{(\bar{y}_2^2)^{3/2}}.$$

Используя уравнения (5.106) и (5.107), получаем

$$\begin{aligned} S_{y_2} &= \frac{\overline{u_2^3}}{(\overline{u_2^2})^{3/2}} - 3 \frac{\overline{u_1 u_2^3}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1} + 3 \frac{\overline{u_2^3 u_1 u_2^2}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1} + 6 \frac{\overline{u_1^2 u_2^3}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1^2} - \\ &- 4,5 \frac{\overline{u_2^3 u_1^2 u_2^2}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1^2} + 7,5 \frac{\overline{u_2^3 (u_1 u_2^2)^2}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1^2} - 9 \frac{\overline{u_1 u_2^3 u_1 u_2^2}}{(\overline{u_2^2})^{3/2} \bar{U}_1^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.108)$$

Если в выражении (5.105) для $\bar{y}_2/x_1$ результирующее влияние корреляций третьего и более высоких порядков пренебрежимо мало, то получается интересный результат, состоящий в том, что вели-

чина $\bar{y}_2/x_1$ должна быть пропорциональна напряжению сдвига в потоке в точке, где находится источник:

$$\frac{\bar{y}_2}{x_1} \approx - \frac{\overline{u_1 u_2}}{\bar{U}_1^2} = - \frac{\sigma_{12}}{\rho \bar{U}_1^2}. \quad (5.109)$$

Величина $\bar{y}_2/x_1$ идентична со средней линией, т. е. с центроидом поверхности распределения $\bar{\Gamma}$, так как, по определению,

$$\frac{\bar{y}_2}{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_2}{x_1} \right) \frac{\bar{\Gamma} \left(\frac{y_2}{x_1} \right)}{\bar{\Gamma}(0)} d \left(\frac{y_2}{x_1} \right).$$

Таким образом, ордината этого центроида в первом приближении пропорциональна локальному турбулентному напряжению сдвига.

На рис. 5.7 показано асимметричное распределение температуры вниз по потоку от тонкой нагретой проволоки, помещенной

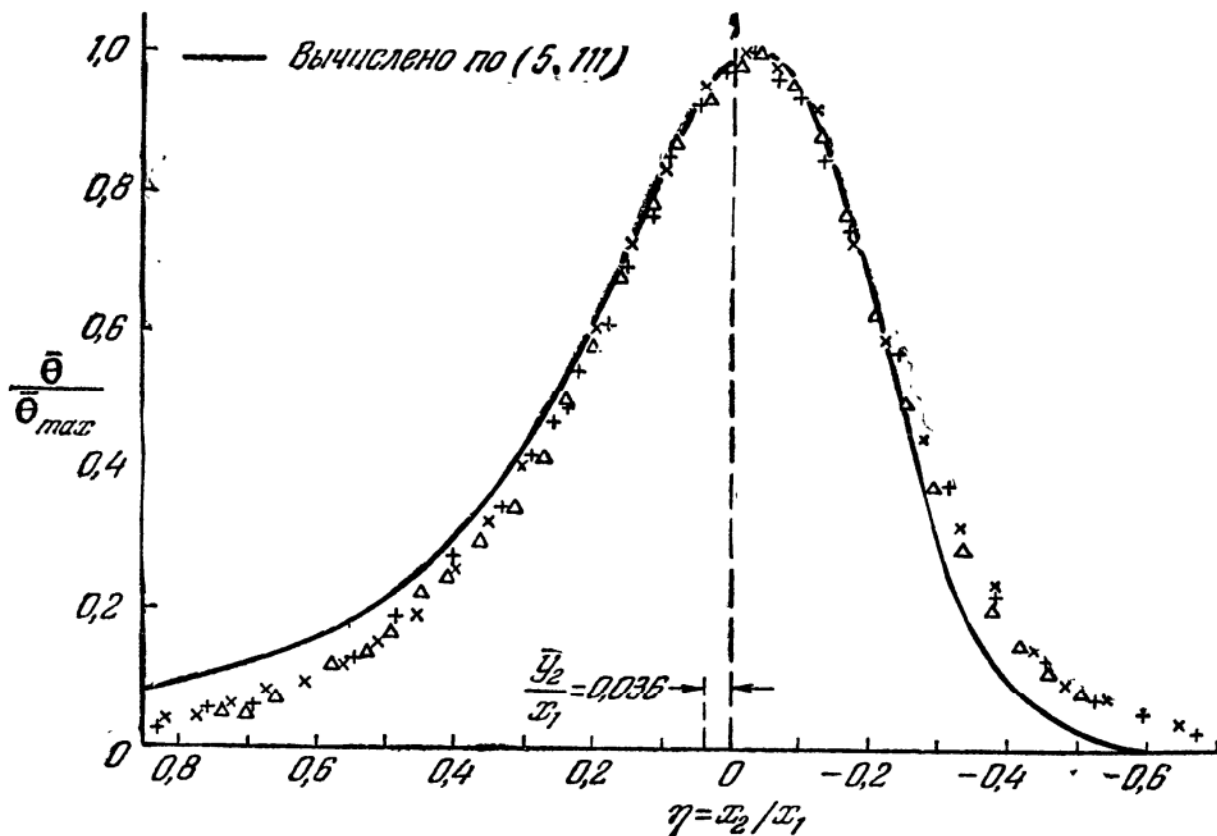


Рис. 5.7. Асимметричное распределение температуры вниз по потоку от нагретой нити в поле турбулентности, генерированной в плоской свободной струе. Местоположение — на 6 мм ниже оси, на расстоянии 100 мм от сопла шириной 5 мм. Скорость истечения 40 м/сек [46].

в горизонтальной плоской свободной струе воздуха, по измерениям Ван дер Хегге Цийнена [46]. Ширина сопла, из которого вытекала струя, составляла $d = 5$ мм; скорость истечения струи была 40 м/сек. В поперечном сечении струи, удаленном от сопла на расстояние $20d$

(где максимальная скорость составляла 22 м/сек, а ширина струи была около 40 мм), была установлена нагретая до 400°С платиноиридиевая проволока диаметром 0,05 мм и длиной 10 мм, которая находилась на 6 мм ниже оси струи. Распределение температуры дано в системе координат, начало которой совпадает с местоположением источника тепла, а ось x_1 параллельна направлению осредненной скорости и проходит через источник.

Характер полученной асимметрии таков, что распространение $\bar{\Gamma}$ является наибольшим в направлении зоны, где осредненная скорость $\bar{U}_1$ выше. Это легко объяснить. Если, например, $d\bar{U}_1/dx_2 > 0$ и, следовательно, $\sigma_{12} > 0$, то тогда $\overline{u_1 u_2} < 0$. Но это значит, что при положительных значениях u_2 через контрольную плоскость в среднем будет переноситься большее количество жидких частиц с отрицательной скоростью u_1 , и наоборот. Положительным значениям u_2 жидких частиц, проходящих через контрольную плоскость, соответствуют также и положительные значения x_2 . Значит, при одинаковом значении x_1 для положительных значений x_2 в среднем получается $t > x_1/\bar{U}_1$. Аналогично при отрицательных значениях x_2 в среднем $t < x_1/\bar{U}_1$. Следовательно, распространение жидких частиц для положительных значений x_2 должно быть больше, нежели для отрицательных значений x_2 .

Ордината центроида поверхности распределения температуры равна $\bar{y}_2/x_1 = 0,036$, что согласуется со значением $\sigma_{12}/\rho \bar{U}_1^2 = 0,036$, вычисленным по распределению осредненной скорости.

Для того же распределения температуры имеем $\bar{y}_2^2/x_1^2 = 0,0704$ и $\bar{y}_2^3/x_1^3 = 0,01705$. Отсюда получаем коэффициент асимметрии $S_{y_2} = 0,85$. Никаких измерений, касающихся величины $\bar{u}_2^3$ или различных корреляций скорости третьего и более высоких порядков, которые содержатся в (5.108), не проводилось. Однако это соотношение можно использовать для вычисления коэффициента асимметрии распределения скорости u_2 , если, следуя предложению Бэтчелора и Таунсенда [25], рассматривать только первые три члена в правой части выражения (5.108) и считать, что (1) связь корреляции скорости четвертого порядка $\overline{u_1 u_2^3}$ с $\overline{u_1 u_2}$ такова, как будто распределение совместной вероятности u_1 и u_2 нормально, и что (2) величина $\overline{u_1 u_2^2}$ меньше $\bar{u}_2^3$ в $\overline{u_1 u_2}/\bar{u}_2^2$ раз.

Если $F(u_1, u_2)$ — функция распределения плотности совместной вероятности u_1 и u_2 , то ее выражение в том случае, когда это рас-

пределение нормально, имеет вид (см., например, [49])

$$F\left(\frac{u_1}{\bar{U}_1}, \frac{u_2}{\bar{U}_1}\right) = \frac{\bar{U}_1^2}{2\pi u'_1 u'_2 [1 - R_{12}^2(0)]^{1/2}} \times \\ \times \exp\left\{\frac{-1}{2[1 - R_{12}^2(0)]} \left[\frac{u_1^2}{u'^2_1} - \frac{2u_1 u_2 R_{12}(0)}{u'_1 u'_2} + \frac{u_2^2}{u'^2_2}\right]\right\}, \quad (5.110)$$

где $R_{12}(0) = \overline{u_1 u_2} / u'_1 u'_2$.

Нормальное распределение плотности совместной вероятности имеет следующие характерные особенности:

1. Предельные распределения величин u_1 и u_2 представляют собой нормальные гауссовские распределения.

2. Все нечетные моменты являются нулями:

$$\overline{u_1^m u_2^n} = \frac{1}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u_1, u_2) u_1^m u_2^n du_1 du_2 = 0,$$

когда m и n — целые числа, а $(m + n)$ — нечетное число.

Соотношение между моментом четвертого порядка $\overline{u_1 u_2^3}$ и $\overline{u_1 u_2}$ запишется в виде

$$\overline{u_1 u_2^3} = \frac{1}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u_1, u_2) \overline{u_1 u_2^3} du_1 du_2 = 3R_{12}(0) u'_1 u'^3_2.$$

Таким образом, воспользовавшись предположением Бэтчелора и Таунсенда, из формулы (5.108) получим

$$S_{y_2} \approx S_{u_2} - 9 \frac{u'_1}{\bar{U}_1} R_{12}(0) + 3S_{u_2}^2 \frac{u'_1}{\bar{U}_1} R_{12}(0),$$

где S_{u_2} — коэффициент асимметрии распределения u_2 .

Как будет показано ниже, асимметричное распределение температуры можно вычислить, если известна функция плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$. Тогда по этому асимметричному распределению температуры можно оценить величины u'_1 и u'_2 . Для распределения температуры, изображенного на рис. 5.7, Хинце и Ван дер Хегге Цийнен получили $u'_1/\bar{U}_1 = 0,28$ и $u'_2/\bar{U}_1 = 0,215$. Отсюда при $\overline{u_1 u_2}/\bar{U}_1^2 = -\sigma_{12}/\rho \bar{U}_1^2 = -0,036$ получается $R_{12}(0) = -0,60$. Таким образом, при $S_{y_2} = 0,85$ значение S_{u_2} оказывается равным $-0,48$. Отрицательную величину коэффициента асимметрии распределения u_2 как раз и следовало ожидать, поскольку интенсивность турбулентности u'_2 в точке, где расположен источник тепла, имеет положительный

градиент $du'_2/dx > 0$. Это значение S_{u_2} по своей величине близко к значениям, полученным Таунсендом [50] для следа за круглым цилиндром, вблизи точки максимального напряжения сдвига и находящимся в диапазоне от $-0,4$ до $-0,5$.

Если величину $\overline{u_2^2}/\overline{U_1^2} = 0,046$ сравнить с $\overline{y_2^2}/x_1^2 = 0,074$, то, основываясь на соотношении (5.106), придем к заключению, что вкладом

от корреляций скорости более высокого порядка пренебрегать нельзя.

Кроме того, используя значение коэффициента асимметрии $S_{u_2} = -0,48$, получаем

$$\frac{\overline{u_2^3}}{\overline{U_1^3}} = -0,0048,$$

тогда как $\overline{y_2^3}/x_1^3 = 0,01705$. Следовательно, и в данном случае составляющими от корреляции скорости более высокого порядка в соотношении (5.107) тоже пренебрегать нельзя. Эти результаты относительно $\overline{y_2^2}/x_1^2$ и $\overline{y_2^3}/x_1^3$, как видим, совершенно противоположны вы-

воду, сделанному в отношении $\overline{y_2}/x_1$. Этот последний вывод, состоящий в том, что результирующей составляющей от корреляций третьего и более высоких порядков в соотношении (5.105) можно пренебречь, по-видимому, справедлив также и применительно к другим точкам, расположенным в том же поперечном сечении струи. На рис. 5.8 изображено распределение величины $\sigma_{12}/\rho\overline{U_1^2}$ в поперечном сечении струи, определенное один раз по значениям $\overline{y_2}/x_1$, а другой раз — по распределению осредненной скорости согласно методике, которая будет описана в главе 6.

Покажем теперь, как вычисляется распределение температуры, если функцию плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$ считать известной. При этом мы воспользуемся методом, аналогичным изложенному в предыдущем параграфе.

Рассмотрим расположенную вниз по потоку от теплового источника точку с координатами (x_1, x_2) . Для жидкой частицы, которая проходит мимо источника тепла в момент времени t_0 с компонентами скорости $\overline{U_1} + u_1$ и u_2 и которая попадает в рассматриваемую точку



Рис. 5.8. Распределение напряжения сдвига в плоской свободной струе в сечении на расстоянии 100 мм от сопла шириной 5 мм [46].

в момент времени t , компоненты скорости и интервал времени $t - t_0$ связаны соотношениями

$$x_1 = (\bar{U}_1 + u_1)(t - t_0), \quad x_2 = u_2(t - t_0).$$

Обозначим через $P'(x_1, x_2, t - t_0) dx_1 dx_2$ вероятность прохождения жидкой частицы через элементарную площадку $dx_1 dx_2$ в рассматриваемой точке по истечении интервала времени $t - t_0$. Попробуем выразить эту вероятность через функцию плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$. При условии, что величины u_1, u_2, x_1, x_2 и $t - t_0$ удовлетворяют записанным выше соотношениям, вероятность $P'(x_1, x_2, t - t_0) dx_1 dx_2$ должна быть в точности равна $F(u_1, u_2) du_1 du_2$. Таким образом, если через S^* снова обозначить интенсивность источника, то вероятность того, что жидкость, миновавшая тепловой источник за время dt_0 , пройдет через элементарную площадку $dx_1 dx_2$, определится выражением

$$P'(x_1, x_2, t - t_0) dt_0 dx_1 dx_2 = S^* dt_0 F(u_1, u_2) du_1 du_2 \bar{U}_1^2.$$

Для непрерывного источника вероятность пребывания жидкой частицы, которая начала свое движение от источника, на элементарной площадке $dx_1 dx_2$ запишется так:

$$P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^t S^* F(u_1, u_2) du_1 du_2 dt_0.$$

Но поскольку при заданной величине $t - t_0$ имеем

$$du_1 = \frac{dx_1}{t - t_0}, \quad du_2 = \frac{dx_2}{t - t_0},$$

то записанное выше соотношение принимает вид

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^t F(u_1, u_2) \frac{1}{(t - t_0)^2} dt_0.$$

При заданной величине x_1 можем записать

$$\frac{dt_0}{(t - t_0)^2} = d \frac{1}{t - t_0} = d \frac{\bar{U}_1 + u_1}{x_1} = \frac{du_1}{x_1}.$$

Следовательно,

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{x_1^2 \bar{U}_1^2} \int_{-\bar{U}_1}^{\infty} F(u_1, u_2) du_1,$$

или

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{x_1 \bar{U}_1} \int_{-1}^{\infty} F\left[\frac{u_1}{\bar{U}_1}, \left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}_1}\right) \frac{x_2}{x_1}\right] d \frac{u_1}{\bar{U}_1}.$$

Подставляя сюда выражение (5.110) для нормальной функции плотности совместной вероятности и выполняя интегрирование, получаем

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\sqrt{2\pi} [\bar{u}_2^2 x_1^2 - 2u_1' u_2' R_{12}(0) x_2 x_1 + \bar{u}_1^2 x_2^2]^{1/2}} \times \\ \times \operatorname{erfc} \left\{ -\frac{u_2' \bar{U}_1 x_1 \left[1 - \frac{u_1'}{u_2'} R_{12}(0) \right]}{u_1' \{2[1 - R_{12}(0)] [\bar{u}_2^2 x_1^2 - 2u_1' u_2' R_{12}(0) x_2 x_1 + \bar{u}_1^2 x_2^2]\}^{1/2}} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{-\bar{U}_1^2 x_2^2}{2[\bar{u}_2^2 x_1^2 - 2u_1' u_2' R_{12}(0) x_2 x_1 + \bar{u}_1^2 x_2^2]} \right\}. \quad (5.111a)$$

Нетрудно убедиться в том, что при $R_{12}(0) = 0$, т. е. в случае равномерного осредненного потока, это выражение сводится к (5.93).

Если влиянием молекулярной диффузии пренебречь, то распределение $\bar{\Gamma}$ окажется идентичным функции $P(x_1, x_2)$. Это распределение зависит только от $\eta = x_2/x_1$; иными словами, распределения температуры в последовательных поперечных сечениях следа за тепловым источником являются подобными.

Если уравнение (5.111a) желательно применить к действительным распределениям $\bar{\Gamma}$, то следует иметь в виду, что (1) предположение о нормальном распределении совместной вероятности u_1 и u_2 , по всей видимости, несправедливо и что (2) полученные соотношения справедливы только при малом времени диффузии $t - t_0$, т. е. при малых значениях $x_1/(\bar{U}_1 + u_1)$ и x_2/u_2 . Если величина $u_1'/\bar{U}_1$ значительно меньше единицы, то условие малости времени диффузии эквивалентно требованию, чтобы значение $\eta = x_2/x_1$ было мало. Оценка значений η , выше которых предположение о малости времени диффузии при небольших величинах $u_1'/\bar{U}_1$ уже более несправедливо, может быть произведена по величине $u_2'/\bar{U}_1$. Таким образом, если исследуется диффузия в свободной струе, то следует выбирать значения η , ненамного превышающие $u_2'/\bar{U}_1$, т. е. приблизительно 0,2.

При малом времени диффузии значение функции erfc , входящей в выражение (5.111a), практически равно 2. Тогда для распределения $\bar{\Gamma}$ в поперечном сечении, отнесенного к $\bar{\Gamma}(0)$, получим следующее выражение:

$$\frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{\bar{\Gamma}(0)} = \frac{1}{[1 - 2(u_1'/u_2') R_{12}(0) \eta + (u_1'^2/u_2'^2) \eta^2]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{-\bar{U}_1^2 \eta^2}{2u_2'^2 [1 - 2(u_1'/u_2') R_{12}(0) \eta + (u_1'^2/u_2'^2) \eta^2]} \right\}.$$

В случае изотропной турбулентности, когда $u'_1 = u'_2$ и $R_{12}(0) = 0$, имеем

$$\frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{\bar{\Gamma}(0)} = \frac{1}{(1 + \eta^2)^{1/2}} \exp \left[\frac{-\bar{U}_1^2 \eta^2}{2u_2'^2 (1 + \eta^2)} \right]. \quad (5.1116)$$

Согласно этому результату, распространение $\bar{\Gamma}$ при более высоких значениях η должно быть несколько больше, чем по распределению Гаусса.

На рис. 5.7 нанесена кривая распределения температуры, рассчитанная по уравнению (5.111a), где значение $R_{12}(0)$ определялось по

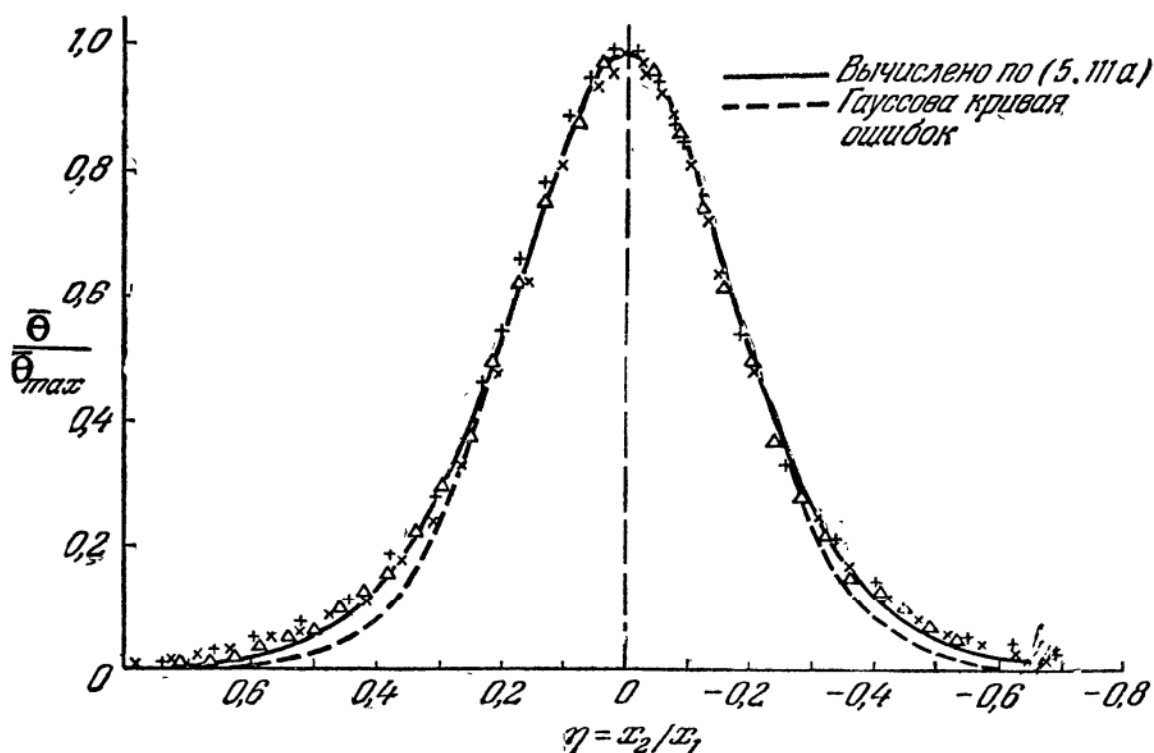


Рис. 5.9. Распределение температуры вниз по потоку от нагретой нити при почти изотропной турбулентности в сечении плоской свободной струи на расстоянии 100 мм от сопла шириной 5 мм [46].

величине $\bar{y}_2/x_1$, а u'_1 и u'_2 вычислялись методом последовательных приближений. При этом для $u'_1/\bar{U}_1$ и $u'_2/\bar{U}_1$ были найдены соответственно значения 0,28 и 0,215, приведенные выше. Согласование с опытными данными в диапазоне $-0,2 < x_2/x_1 < 0,2$ является вполне удовлетворительным. При больших значениях x_2/x_1 расчетная кривая оказывается слишком асимметричной.

На рис. 5.9 показано полученное в опытах Ван дер Хегге Цийнена [46] распределение температуры вниз по потоку от нагретой проволоки, расположенной в некоторой точке на оси плоской свободной струи. Здесь же приведены расчетные кривые, соответствующие уравнению (5.111a) и гауссовой функции ошибок.

Различие между этими двумя расчетными кривыми заметно лишь при значениях x_2/x_1 , значительно превышающих 0,2. Хотя кривая, рассчитанная по уравнению (5.111а), и лучше соответствует опытным данным по сравнению с кривой Гаусса, к ней все же следует относиться с некоторой оговоркой по причинам, указанным выше.

§ 5.7. Диффузия дискретных частиц при однородной турбулентности

Знание поведения дискретных частиц в турбулентном потоке представляет большой интерес для многих отраслей техники, особенно если между частицами и жидкостью имеется значительная разница в плотности. Совместное движение твердых частиц и жидкости или распыленных капельных жидкостей и газов (запыленное течение) встречается, например, по крайней мере в одном из следующих технических приложений: в аппаратах для очистки газа и жидкости (например, в циклонных сепараторах), в пневмотранспорте, при промывке угля и обогащении руды, в химических реакторах, работающих на жидких суспензиях твердых частиц, при сжигании размельченного или распыленного топлива и т. д.

Поведение конгломерата дискретных частиц в турбулентном потоке жидкости в значительной степени зависит (1) от концентрации этих частиц и (2) от размера частиц по сравнению с масштабом турбулентности в жидкости.

При высокой концентрации наблюдается непосредственное взаимодействие между частицами из-за столкновений, а также из-за влияния на течение жидкости в окрестности частиц. Движение частиц относительно жидкости вследствие образования дополнительной турбулентности может привести к добавочной диссипации кинетической энергии турбулентного движения жидкости, способствуя тем самым подавлению турбулентности в жидкости. При крайне высоких концентрациях, близких к концентрации при максимальной упаковке частиц, турбулентность может даже «вымерзнуть», по терминологии, введенной Бэгнольдом для обозначения условий почти полного подавления турбулентного движения. Как показал Бэгнольд [51, 52], при таких высоких концентрациях частиц вследствие столкновений и явления сальтации все еще могут наблюдаться значительные нормальные и касательные напряжения. Если частицы являются очень мелкими, то могут играть роль эффекты, отличные от чисто гидродинамических, приводя, например, к агломерации частиц.

В другом предельном случае, а именно, когда концентрация частиц очень низка, взаимодействием между частицами можно пренебречь и каждую частицу рассматривать, как если бы в турбулентном потоке она была единственной. Если частицы крупны по сравнению с масштабом турбулентности, то основное влияние тур-

булентности на частицы будет состоять в увеличении их сопротивления течению и частицы, самое большее, будут в той или иной мере следовать за крупномасштабными турбулентными движениями жидкости. Но если, с другой стороны, частицы очень малы по сравнению с наименьшим масштабом турбулентности, то они будут стремиться следовать за всеми компонентами турбулентного движения в жидкости. Сопротивление движению частиц относительно окружающей жидкости по своей природе обычно полностью связано с вязкостью. В этом случае наличие частиц тоже будет увеличивать диссипацию в турбулентном потоке. Так как эта добавочная диссипация обуславливается отставанием частицы от турбулентного движения жидкости, а также поскольку это отставание с ростом волнового числа турбулентности увеличивается, то логично ожидать, что наличие частиц будет оказывать влияние на энергетический спектр турбулентности главным образом в диапазоне больших волновых чисел.

Теоретических сведений о гидродинамике смеси дискретных частиц произвольного размера и концентрации с жидкостью при турбулентном движении обоих компонентов смеси известно очень мало. При больших концентрациях очень мелких частиц смесь можно считать однородной суспензией и рассматривать ее как неньютоновскую жидкость, обладающую при течении определенными общими особенностями. Для более крупных частиц, как, например, зерна и песчинки, анализ связи между напряжением и скоростью деформации в смеси при почти турбулентном движении был проведен Бэгнольдом.

Интенсивное теоретическое исследование движения мелких частиц, суспендированных в турбулентном потоке жидкости, было осуществлено Ченом [53]. После работы Чена в печати появилось лишь несколько статей по этому вопросу. Наиболее важными из них являются исследования Корсина и Ламли [55, 69], а также Фридлэндера [70].

Ниже мы будем касаться главным образом исследований Чена, однако в несколько отличной математической трактовке. Хотя случай, рассмотренный Ченом, и является предельным ввиду принятых им упрощающих предположений, некоторые из полученных при этом результатов представляют общий интерес.

В теории Чена приняты следующие предположения:

1. Турбулентность в жидкости является однородной и стационарной.
2. Область турбулентности имеет бесконечную протяженность.
3. Частица имеет сферическую форму и обладает настолько малыми размерами, что ее движение относительно окружающей среды подчиняется стоксову закону сопротивления.
4. Частица мала по сравнению с наименьшей длиной волны, имеющей место при турбулентном движении.
5. При движении частицы в ее окрестности содержатся одни и те же жидкие частицы.

6. Любая внешняя сила, действующая на частицу, связана с потенциальным полем, например гравитационным.

Все перечисленные здесь предположения, за исключением предположения 5, достаточно логичны и действительно могут быть удовлетворены. Что касается предположения 5, то механизм реальной турбулентности таков, что это предположение вряд ли удовлетворяется. Если элемент жидкости, содержащий мелкую дискретную частицу, можно было бы рассматривать как недеформируемое целое, скажем как сферу, то, вероятно, и оказалось бы возможным удовлетворить этому предположению при условии, однако, что размер этого элемента больше амплитуды движения дискретной частицы

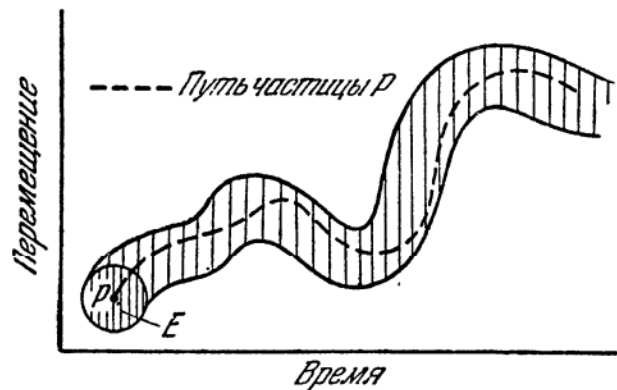


Рис. 5.10. Перемещение дискретной частицы P и сферического жидкого элемента E , внутри которого находится P .

относительно жидкости (частица не выходит за пределы элемента — «не промахивается» мимо него при своем движении). Движение дискретной частицы и жидкого элемента можно было бы в этом случае представить так, как это изображено на рис. 5.10. Однако известно, что при турбулентном движении жидкие элементы деформируются и растягиваются в длинные тонкие ленты, и трудно себе представить, чтобы жидкий элемент в процессе своего растяжения продолжал содержать одни и те же дискретные частицы.

Кроме того, условие непокидания частицей пределов жидкого элемента означает, что дискретная частица не может быть слишком тяжелой по сравнению с жидкостью. Стало быть, любой полученный при последующем анализе результат, касающийся большого отношения плотностей дискретной частицы и жидкости, следует рассматривать с некоторым ограничением.

Мы будем исходить из уравнения медленного движения сферической частицы, выведенного Бассэ [65], Буссинеском [66] и Озеевом [67] для случая покоящейся жидкости, но обобщенного Ченом [53] на случай жидкости, движущейся с переменной скоростью:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{dv_p}{dt} = & 3\pi \mu d (v_f - v_p) + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \left(\frac{dv_f}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right) + \\ & + \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_{t_0}^t \frac{\frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_p}{dt'}}{\sqrt{t - t'}} dt' + F_e, \quad (5.112) \end{aligned}$$

где t — начальный момент времени; индекс f соответствует жидкости, а индекс p — частице; наконец, скорость жидкости v_f — скорость жидких частиц в окрестности дискретной частицы, достаточно удаленных от нее, чтобы не испытывать возмущений, связанных с относительным движением этой частицы.

Смысл различных членов этого уравнения состоит в следующем.

Член в левой части представляет силу, необходимую для ускорения частицы. Первый член в правой части — сила вязкого сопротивления, определяемая законом Стокса. Второй член связан с градиентом давления в жидкости, окружающей рассматриваемую частицу, который обусловлен ускорением жидкости. Третий член характеризует силу, приводящую к ускорению кажущейся массы частицы относительно окружающей жидкости. Четвертый член — так называемая «сила Бассэ» — учитывает влияние отклонения картины течения от установившегося состояния. Последний член F_e представляет собой внешнюю потенциальную силу.

Здесь можно отметить, что второй, третий и четвертый члены в правой части уравнения приобретают важное значение только в том случае, когда плотность жидкости сравнима с плотностью частицы или же превышает ее. Сила Бассэ увеличивает мгновенное сопротивление течению. В момент времени $t' = t$ подынтегральное выражение здесь обращается в бесконечность, но поскольку стремление этого выражения к бесконечности происходит пропорционально $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1/2}$, то интеграл останется конечной величиной. Когда

частица быстро ускоряется под действием большой внешней силы, то сила Бассэ может стать существенной, увеличив тем самым мгновенный коэффициент сопротивления во много раз по сравнению с его величиной при установившемся состоянии. Расчеты, указавшие на это увеличение, были произведены Хьюджесом и Джиллилендом [54].

Когда внешняя потенциальная сила F_e имеет постоянную величину, например в случае гравитационного поля, при котором соответствующая компонента равняется весу за вычетом подъемной силы, то движение частицы в установившемся состоянии представляет собой суперпозицию постоянной скорости, равной скорости свободного падения в жидкости, и скорости, накладываемой движением жидкости. В силу линейности уравнения (5.112) скорость свободного падения не зависит от движения жидкости.

Поскольку нас интересует в основном движение дискретной частицы, обусловленное движением жидкости, то ниже мы больше не будем учитывать влияние внешних сил. Но, благодаря линейности уравнения (5.112), полученные при этом результаты все же будут справедливы даже при наличии внешних сил.

Если движение жидкости является турбулентным, то следует считать, что скорость жидкости представляет собой случайную

функцию времени и пространственных координат. Для удобства выберем систему координат, движущуюся вместе с дискретной частицей. Тогда любая неоднородность пространственного движения системы испытывается частицей как неоднородность относительно времени. Однако в связи с тем, что скорость жидкости отлична от скорости дискретной частицы, скорость жидкости относительно рассматриваемой системы координат остается также функцией и пространственных координат. Ниже будут сформулированы условия, которые должны быть удовлетворены, чтобы движение жидкости зависело только от времени.

Как показали Корсин и Ламли [55], второй член в правой части уравнения (5.112), если это уравнение применяется к турбулентному движению жидкости, при котором скорость жидкости зависит от времени и пространства, должен быть видоизменен. Этот член связан с падением давления в окружающей жидкости. Согласно уравнению Навье — Стокса, для компоненты $(v_f)_i$ имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_f \left[\frac{\partial (v_f)_i}{\partial t} + (v_f)_k \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k} \right] - \mu \frac{\partial^2 (v_f)_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Кроме того, следует иметь в виду, что во всех других членах

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_p)_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

так как наша система координат движется вместе с дискретной частицей.

Следовательно, уравнение (5.112) для i -й компоненты скорости дискретной частицы и жидкости должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{d}{dt} (v_p)_i &= 3\pi \mu d [(v_f)_i - (v_p)_i] + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_f)_i + (v_f)_k \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k} \right] - \\ &- \frac{\pi}{6} d^3 \mu \frac{\partial^2 (v_f)_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \frac{d}{dt} [(v_f)_i - (v_p)_i] + \\ &+ \frac{3}{2} d^2 V \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_{t_0}^t \frac{\frac{d}{dt'} [(v_f)_i - (v_p)_i]}{V t - t'} dt', \end{aligned}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_p)_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Теперь можем записать

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_f)_i + (v_f)_k \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k} = \frac{d}{dt} (v_f)_i + [(v_f)_k - (v_p)_k] \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, наше уравнение после некоторых преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_p)_i = & \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \left[\frac{d}{dt}(v_f)_i - \frac{2}{3} v \frac{\partial^2 (v_f)_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] + \\ & + \frac{2}{2\rho_p + \rho_f} \left\{ \frac{18\mu}{d^2} [(v_f)_i - (v_p)_i] + \rho_f [(v_f)_k - (v_p)_k] \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k} \right\} + \\ & + \frac{18}{(2\rho_p + \rho_f) d} \sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{\frac{d}{dt'} [(v_f)_i - (v_p)_i]}{\sqrt{t - t'}} dt'. \quad (5.113) \end{aligned}$$

Это уравнение показывает, что нелинейными членами можно пренебречь, когда

$$\rho_f \frac{\partial v_f}{\partial x} \ll \frac{\mu}{d^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2}{v} \frac{\partial v_f}{\partial x} \ll 1. \quad (5.114)$$

Это условие выполняется, если дискретная частица мала и если $\partial v_f / \partial x^* \ll 1$, где $x^* = x/d$. Кроме того, это уравнение остается уравнением первого порядка, в котором единственной независимой переменной является только время, если слагаемым, связанным с вязкостью, в первом члене правой части можно пренебречь. Для этого необходимо, чтобы

$$v_p \frac{\partial v_f}{\partial x} \gg v \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{v_p}{v} \frac{\partial v_f / \partial x}{\partial^2 v_f / \partial x^2} \gg 1.$$

Согласно требованию (5.114), должно быть

$$\frac{v_p}{d^2 (\partial^2 v_f / \partial x^2)} \gg 1. \quad (5.115)$$

Таким образом, вторая производная, отнесенная к d как к единице длины, т. е. $\partial^2 v_f / \partial x^{*2}$, где $x^* = x/d$, должна быть очень мала.

Чен полагал производные $\partial (v_f)_i / \partial x_k$ в члене

$$\rho_f [(v_f)_k - (v_p)_k] \frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}$$

заданными величинами, которые в первом приближении, вероятно, могут даже рассматриваться как постоянные, так что этот член в совокупности со слагаемым, выражающим стоковое сопротивление, дает дополнительное кажущееся линейное сопротивление.

Предположим, что условия (5.114) и (5.115) выполняются и что уравнение (5.113) сохраняет характер уравнения (5.112), т. е. является линейным и зависит только от времени. Не нарушая общности, можно рассматривать лишь по одной компоненте скоростей v_p и v_f . Основываясь на принятых выше приближенных

предположениях и опуская для упрощения индекс i , приводим уравнение (5.113) к следующей форме:

$$\frac{dv_p}{dt} + av_p = av_f + b \frac{dv_f}{dt} + c \int_{t_0}^t \frac{dv_f/dt' - dv_p/dt'}{\sqrt{t-t'}} dt', \quad (5.116)$$

где

$$a = \frac{36\mu}{(2\rho_p + \rho_f)d^2}, \quad b = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f}, \quad c = \frac{18}{(2\rho_p + \rho_f)d} \sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}}.$$

Обратимся сначала к стационарному случаю, который также был исследован Ченом. При этом исходный момент времени t_0 может быть принят равным $-\infty$. Чену удалось преобразовать уравнение (5.116) в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и найти его общее решение. Он показал, далее, что в общем случае, при большом времени диффузии, коэффициенты диффузии для дискретных частиц и для жидких частиц одинаковы. Этот интересный результат можно получить непосредственно из уравнения (5.116), если предположить, что обе скорости v_p и v_f могут быть представлены интегралом Фурье [ср. с уравнением (1.87)]:

$$v_f = \int_0^\infty (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) d\omega$$

(5.117)

и

$$v_p = \int_0^\infty (\gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t) d\omega,$$

где $\omega = 2\pi n$ — угловая частота.

Если выражения (5.117) для v_f и v_p подставить в уравнение (5.116) и изменить порядок интегрирования, то появятся следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega t'}{\sqrt{t-t'}} dt' \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^t \frac{\cos \omega t'}{\sqrt{t-t'}} dt'.$$

Эти интегралы берутся посредством замены $t - t'$ на τ и использования известных значений определенных интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.$$

Таким образом, подставляя (5.117) в уравнение (5.116) и выполняя необходимые операции дифференцирования и интегрирования, находим, что уравнение (5.116) тождественно удовлетворяется, если

сумму членов с синусами и сумму членов с косинусами положить равными нулю. Отсюда получим следующие соотношения между γ , δ , α и β :

$$\gamma = [1 + f_1(\omega)]\alpha + f_2(\omega)\beta, \quad \delta = -f_2(\omega)\alpha + [1 + f_1(\omega)]\beta, \quad (5.118)$$

где

$$f_1(\omega) = \frac{\omega(\omega + c\sqrt{\pi\omega/2})(b-1)}{(a + c\sqrt{\pi\omega/2})^2 + (\omega + c\sqrt{\pi\omega/2})^2},$$

$$f_2(\omega) = \frac{\omega(a + c\sqrt{\pi\omega/2})(b-1)}{(a + c\sqrt{\pi\omega/2})^2 + (\omega + c\sqrt{2\pi\omega/2})^2}.$$

Введем теперь лагранжевы функции энергетического спектра $E_{f_L}(n)$ — для жидкости и $E_{p_L}(n)$ — для дискретных частиц. Тогда, как и в § 1.12, можно показать, что

$$\begin{aligned} \overline{v_f^2} &= \pi^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2}{T} dn = \int_0^\infty E_{f_L}(n) dn, \\ \overline{v_p^2} &= \pi^2 \int_0^\infty \frac{\gamma^2 + \delta^2}{T} dn = \int_0^\infty E_{p_L}(n) dn, \end{aligned} \quad (5.119)$$

где T — достаточно длительный период времени. Кроме того,

$$R_{f_L}(t) = \frac{\overline{v_f(t_0)v_f(t_0+t)}}{v_f'^2} = \frac{1}{v_f'^2} \int_0^\infty E_{f_L}(n) \cos 2\pi nt dn$$

и (5.120)

$$R_{p_L}(t) = \frac{\overline{v_p(t_0)v_p(t_0+t)}}{v_p'^2} = \frac{1}{v_p'^2} \int_0^\infty E_{p_L}(n) \cos 2\pi nt dn.$$

Уравнение (5.43) определяет диффузию частиц как функцию от времени, выраженную через лагранжеву функцию энергетического спектра. В рассматриваемом случае имеем

$$\overline{y_f^2}(t) = 2 \int_0^\infty E_{f_L}(n) \frac{1 - \cos 2\pi nt}{4\pi^2 n^2} dn$$

и (5.121)

$$\overline{y_p^2}(t) = 2 \int_0^\infty E_{p_L}(n) \frac{1 - \cos 2\pi nt}{4\pi^2 n^2} dn,$$